Kolmannen ja neljännen asteen yhtälöistä

Esa V. Vesalainen
Matematik och statistik, Åbo Akademi

Tämän pienen artikkelin tarkoituksena on satuilla hieman algebrallisista yhtälöistä. Erityisesti tarkoituksena olisi antaa jonkinlainen kuva siitä, miten kolmannen ja neljännen asteen yhtälöitä voi ratkaista. Vaikka kaikki tämä olisi luonnollisempaa, jos käyttäisimme kompleksilukuja, yritämme kuitenkin yksinkertaisuuden nimissä vältellä niitä.

Toisen asteen yhtälö

Aloittakaamme ratkaisemalla toisen asteen yhtälö. Yleisen toisen asteen yhtälön

$$a\,X^2 + bX + c = 0,$$

missä a, b ja c ovat reaalilukuja ja $a \neq 0$, voimme luonnollisesti yksinkertaistaa jakamalla sen puolittain luvulla a, mikä johtaa toisen asteen yhtälöön

$$X^2 + AX + B = 0,$$

missä

$$A = \frac{b}{a} \qquad \text{ja} \qquad B = \frac{c}{a}.$$

Voimme yksinkertaistaa yhtälöä lisää ottamalla käyttöön uuden muuttujan $x = X + A/2$, jolloin tietenkin $X = x - A/2$, ja yhtälö muuttuu muotoon

$$\left(x - \frac{A}{2}\right)^2 + A\left(x - \frac{A}{2}\right) + B = 0,$$

mistä kertomalla kaiken auki saamme

$$x^2 - Ax + \frac{A^2}{4} + Ax - \frac{A^2}{2} + B = 0,$$

ja sieventämällä

$$x^2 + p = 0,$$

missä

$$p = B - \frac{A^2}{4}.$$

Tämän yhtälön osaammekin ratkaista ja sen ratkaisut ovat

$$x = \pm\sqrt{-p}.$$

Luonnollisesti, jos $p > 0$, niin reaalisia ratkaisuita ei ole. Itse asiassa ratkaisuita on kuitenkin kaksi kappaletta tässä tapauksessa, mutta ne ovat kompleksilukuja, ja pyrimme välttämään kompleksiluvut tässä kirjoituksessa.

Jos $p < 0$, niin saamme kaksi erisuurta reaalista ratkaisua, ja tapauksessa $p = 0$ saamme täsmälleen yhden reaalisen ratkaisun $x = 0$. Nyt voimme myös ratkaista

$$X = -\frac{A}{2} + x = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{-p} = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}.$$

Sijoittamalla vielä alkuperäiset kertoimet tähän saamme pienellä sievennyksellä kaikkien tunteman ystävällisen ratkaisukaavan

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Esimerkki

Tarkastelkaamme esimerkiksi yhtälöä

$$5\,X^2 - 60\,X + 175 = 0$$

yllä kuvatulla tavalla. Jakamalla ensin kertoimella 5, jäljelle jää yhtälö

$$X^2 - 12\,X + 35 = 0.$$

Tekemällä seuraavaksi muuttujanvaihto $X = x + 6$ yhtälö muuttuu muotoon

$$(x + 6)^2 - 12\,(x + 6) + 35 = 0,$$

mikä on auki kirjoitettuna

$$x^2 + 12\,x + 36 - 12\,x - 72 + 35 = 0,$$

ja edelleen sieventämällä

$$x^2 = 1.$$

Tämän ratkaisut ovat tietenkin $x = \pm 1$. Alkuperäisen yhtälön ratkaisut ovat siten $X = 6 \pm 1$ eli $X = 5$ ja $X = 7$.

Pieni toisen asteen yhtälön sovellus

Tarkastelkaamme seuraavaa ongelmaa: Meillä on kaksi tuntematonta reaalilukua a ja b, joista tiedämme summan $S = a + b$ ja tulon $T = ab$. Voimmeko selvittää luvuista S ja T luvut a ja b?

Luonnollisestikaan emme voi selvittää lukujen a ja b järjestystä, jos ne ovat erisuuret, sillä onhan $a + b = b + a$ ja $ab = ba$. Mutta osoittautuu, että muutoin luvut a ja b voi kuin voikin selvittää.

Asian ydin on seuraava: yhtälön

$$(x - a)(x - b) = 0$$

ratkaisut ovat täsmälleen a ja b. Nimittäin, toisaalta voimme suoraan laskea, että

$$(a - a)(a - b) = 0 \cdot (a - b) = 0,$$

ja

$$(b - a)(b - b) = (b - a) \cdot 0 = 0.$$

Toisaalta, jos x on jokin yhtälön ratkaisu, niin silloin

$$x - a = 0 \qquad \text{tai} \qquad x - b = 0,$$

sillä tulo on nolla vain ja ainoastaan silloin, kun ainakin yksi tulontekijä on nolla. Mutta nyt tietenkin

$$x = a \qquad \text{tai} \qquad x = b.$$

Voimme kirjoittaa yhtälön muodossa

$$x^2 - (a + b)\,x + ab = 0,$$

ja tämän yhtälön kertoimet tiedämme, sillä yhtälöhän on

$$x^2 - Sx + T = 0,$$

missä S ja T ovat jo tiedossamme. Tämän yhtälön osaamme ratkaista ja sen ratkaisut ovat

$$\frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - T}.$$

Esimerkki

Kahdesta tuntemattomasta reaaliluvusta a ja b tiedetään, että

$$a + b = 12 \quad \text{ja} \quad ab = 35.$$

Selvittäkäämme nämä luvut a ja b.

Yhtälön

$$(x - a)(x - b) = 0$$

ratkaisut ovat täsmälleen a ja b. Toisaalta, tämä yhtälö on

$$x^2 - (a + b)\,x + ab = 0,$$

eli

$$x^2 - 12\,x + 35 = 0.$$

Tämän yhtälön ratkaisut ovat

$$\frac{12 \pm \sqrt{144 - 140}}{2} = 6 \pm 1,$$

eli 5 ja 7. Siten on oltava

$$a = 5 \quad \text{ja} \quad b = 7,$$

tai

$$a = 7 \quad \text{ja} \quad b = 5.$$

Kolmannen asteen yhtälön yksinkertaistaminen

Siirtykäämme sitten tarkastelemaan kolmannen asteen yhtälöä

$$a\,X^3 + b\,X^2 + cX + d = 0,$$

missä a, b, c ja d ovat reaalilukuja ja $a \neq 0$. Luonnollisesti voimme aina jakaa yhtälön puolittain luvulla a, jolloin se yksinkertaistuu muotoon

$$X^3 + A\,X^2 + BX + C = 0,$$

missä tietenkin

$$A = \frac{b}{a}, \quad B = \frac{c}{a}, \quad \text{ja} \quad C = \frac{d}{a}.$$

Mutta osoittautuu, että voimme yksinkertaistaa yhtälöä vielä hieman enemmänkin ja hävittää siitä yksinkertaisella muuttujanvaihdolla toisen asteen termin kokonaan. Nimittäin, ottamalla käyttöön uusi tuntematon

$$x = X + \frac{A}{3}, \quad \text{jolloin} \quad X = x - \frac{A}{3},$$

yhtälö muuttuu muotoon

$$x^3 + px + q = 0,$$

missä suoraviivaisen laskemisen jälkeen saamme uusille kertoimille lausekkeet

$$p = B - \frac{A^2}{3}$$

ja

$$q = \frac{2\,A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C.$$

Esimerkki

Esimerkiksi, jos tarkastelemme yhtälöä

$$3\,X^3 + 27\,X^2 + 60\,X + 36 = 0,$$

niin jakamalla puolittain kertoimella 3 se yksinkertaistuu muotoon

$$X^3 + 9\,X^2 + 20\,X + 12 = 0.$$

Nyt muuttujanvaihdolla $x = X + 3$ yhtälö muuttuu muotoon

$$(x - 3)^3 + 9\,(x - 3)^2 + 20\,(x - 3) + 12 = 0,$$

mistä kertomalla kaiken auki ja sieventämällä jäljelle jää yhtälö

$$x^3 - 7x + 6 = 0,$$

jossa toisen asteen termiä ei enää ole. Jos nyt keinolla tai toisella ratkaisemme tämän yhtälön ja löydämme sen ratkaisut $x = 1$, $x = 2$ ja $x = -3$, niin alkuperäisen yhtälön ratkaisut ovat vastaavasti

$$X = 1 - 3 = -2, \qquad X = 2 - 3 = -1,$$

ja

$$X = -3 - 3 = -6.$$

Kolmannen asteen yhtälön ratkaiseminen

Riittää siis tarkastella yhtälöä

$$x^3 + px + q = 0,$$

missä p ja q ovat annettuja reaalilukuja. Yksinkertaisuuden vuoksi rajoitumme vain tilanteeseen, jossa

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0.$$

Tässä tilanteessa yhtälöllä on täsmälleen yksi reaalinen ratkaisu. Todettakoon, että tilanteessa, jossa $D < 0$, yhtälöllä on täsmälleen kolme erisuurta reaalista ratkaisua, mutta alla johdetuissa laskuissa joudutaan silloin ottamaan kuutiojuuria kompleksiluvuista. Muutoin kaikki kuitenkin toimii samalla tavalla. Tapauksessa $D = 0$ alla johdettu kaava antaa myös ratkaisun, mutta emme murehdi sitä tapausta kuitenkaan tässä.

Aloitamme yhtälön ratkaisemisen valitsemalla tuntemattomat luvut u ja v niin, että

$$x = u + v$$

ja

$$uv = -\frac{p}{3}.$$

Tiedämme aiemmista pohdinnoistamme, että on olemassa enintään yksi tällainen pari lukuja u ja v, lukuun ottamatta lukujen järjestystä, tietenkin. Ja itse asiassa tällaiset kaksi lukua on aina olemassa kompleksilukuina, ja tarkastelemassamme tilanteessa $D > 0$ kyseiset luvut ovat reaalisia.

Näillä uusilla muuttujilla u ja v voimme kirjoittaa yhtälön muodossa

$$(u + v)^3 + p\,(u + v) + q = 0,$$

mistä kertomalla auki saamme

$$u^3 + v^3 + 3uv\,(u + v) + p\,(u + v) + q = 0,$$

mistä edelleen sieventämällä, muistaen, että valitsimme luvut u ja v niin, että $uv = -p/3$, yhtälö muuttuu muotoon

$$u^3 + v^3 = -q.$$

Lisäksi tiedämme, että

$$u^3\,v^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

Nyt kuutiot u^3 ja v^3 ovat kaksi tuntematonta lukua, joiden summa ja tulo tiedetään, eli voimme selvittää ne aiemmin kuvailemallamme tavalla. Tarkemmin, yhtälön

$$\left(y - u^3\right)\left(y - v^3\right) = 0,$$

missä y on tuntematon, ratkaisut ovat täsmälleen luvut u^3 ja v^3, ja toisaalta, tämä yhtälö on

$$y^2 - \left(u^3 + v^3\right) y + u^3\,v^3 = 0,$$

eli

$$y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Tämän osaammekin ratkaista mukavasti. Sen ratkaisut, eli luvut u^3 ja v^3 jommassa kummassa järjestyksessä, ovat

$$-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Tässä neliöjuuren alla on siis oletustemme mukaan positiivinen luku, eli u^3 ja v^3 ovat kaksi reaalilukua. Koska voimme valita lukujen u ja v järjestyksen haluamallamme tavalla, voimme valita merkit niin, että

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

ja

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Toisin sanoen, olemme löytäneet (ainoan) reaalisen ratkaisun

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Esimerkki

Tarkastelkaamme esimerkkinä yhtälöä

$$x^3 - 11x + 20 = 0.$$

Tässä tapauksessa otamme käyttöön uudet tuntemattomat muuttujat u ja v niin, että

$$u + v = x$$

ja

$$uv = -\frac{11}{3}.$$

Nyt yhtälömme muuttuu muotoon

$$u^3 + v^3 = -20.$$

Lisäksi tiedämme, että

$$u^3\,v^3 = \left(-\frac{11}{3}\right)^3 = -\frac{11^3}{27}.$$

Siten luvut u^3 ja v^3 ovat täsmälleen yhtälön

$$\left(y-u^3\right)\left(y-v^3\right)=0,$$

eli yhtälön

$$y^2+20\,y-\frac{11^3}{27}=0$$

ratkaisut. Tämän yhtälön ratkaisut ovat täsmälleen

$$-10\pm\sqrt{\frac{20^2}{4}-\frac{11^3}{27}},$$

ja niin saamme alkuperäisen yhtälömme ainoan reaalisen ratkaisun

$$x=\sqrt[3]{-10+\sqrt{\frac{20^2}{4}-\frac{11^3}{27}}}+\sqrt[3]{-10-\sqrt{\frac{20^2}{4}-\frac{11^3}{27}}}.$$

Vaikkakaan se ei ole mitenkään selvää tästä lausekkeesta, on itse asiassa $x=-4\ldots$

Neljännen asteen yhtälöstä

Emme ratkaise yleistä neljännen asteen yhtälöä tässä huolellisesti, mutta ehkä lienee paikallaan hahmotella, miten se onnistuu. On kiintoisaa, että se onnistuu samanlaisin ideoin kuin kolmannen asteen yhtälönkin ratkaisu. Ja sopivan kolmannen asteen yhtälön ratkaiseminen on vieläpä eräs välivaihe yleisen neljännen asteen yhtälön ratkaisemisessa.

Nimittäin, samoin kuin aiemmin, yleinen neljännen asteen yhtälö

$$a\,X^4+b\,X^3+c\,X^2+dX+e=0,$$

missä a, b, c, d ja e ovat reaalilukuja ja $a\neq 0$, voidaan tietenkin yksinkertaistaa jakamalla puolittain kertoimella a muotoon

$$X^4+A\,X^3+B\,X^2+CX+D=0,$$

ja edelleen muuttujanvaihdolla $x=X+A/4$ muotoon

$$x^4+p\,x^2+qx+r=0.$$

Nyt, jos x on ratkaisu, voimme valita uudet muuttujat u, v ja w niin, että

$$u+v+w=x,$$

ja

$$uv+vw+wu=\frac{x^2}{2}+\frac{p}{4},$$

sekä

$$uvw=-\frac{q}{8}.$$

Näiden kolmen lausekkeen arvot kiinnittävät luvut u, v ja w järjestystä vaille yksikäsitteisellä tavalla, sillä ne ovat yhtälön

$$(t-u)\,(t-v)\,(t-w)=0,$$

missä t toimittaa tuntemattoman virkaa, ratkaisut. Tämän yhtälön voi kirjoittaa muodossa

$$t^3-(u+v+w)\,t^2+(uv+vw+wu)\,t-uvw=0,$$

missä kertoimet ovat annettuja. Lisäksi ehdoista seuraa, että

$$u^2+v^2+w^2=-\frac{p}{2}.$$

Alkuperäinen neljännen asteen yhtälömme sievenee lukujen u, v ja w tulon ja neliöiden summan arvojen avulla muotoon

$$u^2\,v^2+v^2\,w^2+w^2\,u^2=\frac{p^2}{16}-\frac{r}{4}.$$

Nyt neljännen asteen yhtälön ratkaisemisen ideana on, että

$$u^2+v^2+w^2=-\frac{p}{2},$$

ja

$$u^2\,v^2+v^2\,w^2+w^2\,u^2=\frac{p^2-4r}{16},$$

sekä

$$u^2\,v^2\,w^2=\frac{q^2}{64}.$$

Siten luvut u^2, v^2 ja w^2 ovat kolmannen asteen yhtälön

$$\left(y-u^2\right)\left(y-v^2\right)\left(y-w^2\right)=0,$$

eli yhtälön

$$y^3+\frac{p}{2}\,y^2+\frac{p^2-4r}{16}\,y-\frac{q^2}{64}=0,$$

ratkaisut ja tämän yhtälön ratkaiseminen onnistuu. Lopuksi, luvuista u^2, v^2 ja w^2 voi ottaa neliöjuuret niin, että luvut u, v ja w ovat tiedossa, ja kunhan vain neliöjuurissa etumerkit valitaan niin, että $uvw=-q/8$, saamme neliöjuurien summista $x=u+v+w$ neljännen asteen yhtälön ratkaisut.

Esimerkki

Tarkastelkaamme esimerkkinä sitä, miltä yllä kuvatut neljännen asteen yhtälön ratkaisun ideat näyttävät konkreettisen yhtälön

$$x^4-62\,x^2-240\,x-239=0$$

tapauksessa. Tässä tapauksessa valitsemme tuntemattomat luvut u, v ja w niin, että

$$u + v + w = x,$$

ja

$$uv + vw + wu = \frac{x^2}{2} + \frac{-62}{4} = \frac{x^2}{2} - \frac{31}{2},$$

sekä

$$uvw = -\frac{-240}{8} = 30.$$

Nyt voimme laskea, että

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 + w^2 &= (u + v + w)^2 - 2\,(uv + vw + wu) \\ &= x^2 - 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{31}{2}\right) = 31, \end{aligned}$$

ja, muistaen, että $x^4 - 62\,x^2 = 240\,x + 239$, että

$$\begin{aligned} &u^2\,v^2 + v^2\,w^2 + w^2\,u^2 \\ &\quad = (uv + vw + wu)^2 - 2uvw\,(u + v + w) \\ &\quad = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{31}{2}\right)^2 - 2 \cdot 30 \cdot x \\ &\quad = \frac{x^4 - 62\,x^2 + 31^2}{4} - 60\,x \\ &\quad = \frac{240\,x + 239 + 31^2}{4} - 60\,x = 300. \end{aligned}$$

Koska vielä $u^2\,v^2\,w^2 = 30^2 = 900$, on kolmannen asteen yhtälö

$$\left(y - u^2\right)\left(y - v^2\right)\left(y - w^2\right) = 0$$

siis

$$y^3 - 31\,y^2 + 300\,y - 900 = 0.$$

Sen ratkaisut y, ja siis myös luvut u^2, v^2 ja w^2, ovat loppujen lopuksi 6, 10 ja 15. Luvuiksi u, v ja w voidaan siis valita $\pm\sqrt{6}$, $\pm\sqrt{10}$ ja $\pm\sqrt{15}$, missä merkit on valittava niin, että $uvw = 30$.

Näin päädymme yhtälön ratkaisuihin

$$x = \sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15}$$

ja

$$x = \sqrt{6} - \sqrt{10} - \sqrt{15}$$

ja

$$x = -\sqrt{6} + \sqrt{10} - \sqrt{15}$$

sekä

$$x = -\sqrt{6} - \sqrt{10} + \sqrt{15}.$$

Kirjallisuudesta

Yllä esitetyt kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden tarkastelut perustuvat erityisesti klassikkoteokseen [6], josta voi opiskella paljon laajemminkin klassista algebraa. Kolmannen asteen yhtälöitä on tarkasteltu Solmun sivuilla aiemminkin artikkeleissa [5, 1], joista varsinkin edellinen sisältää paljon yksityiskohtaisemman tarkastelun.

Tässä kirjoituksessa välttelimme kompleksilukuja, mutta ne ovat hirmuisan tärkeitä. Niihin voi tutustua esimerkiksi artikkelista [3]. Eräs erityisen kaunis seikka kompleksilukuihin ja algebrallisiin yhtälöihin liittyen on algebran peruslause, jota voi ihmetellä vaikkapa artikkelista [2].

Sivuutimme historialliset seikat kokonaan. Matematiikan historiaan algebralliset seikat mukaan lukien voi tutustua suomeksi teoksesta [4].

Viitteet

[1] Ajanki, L.: *Kompleksiluvut ja kolmannen asteen yhtälön ratkaisut*, Solmu, 2/2013, 15–17.

[2] Hytönen, T.: *Algebran peruslause lukiolaisille*, Solmu, 3/2011, 6–8.

[3] Lehtinen, M.: *Kaikki tarpeellinen kompleksiluvuista*, Solmu, 1/2006, 17–22.

[4] Lehtinen, M.: *Matematiikan vuosituhannet: perustiedot matematiikan historiasta*, Eukleides-kirjat, 2017.

[5] Saksman, E.: *Kolmannen asteen yhtälöä ratkaisemassa*, Solmu, 1/2000–2001, 5–12.

[6] Väisälä, K.: *Lukuteorian ja korkeamman algebran alkeet*, Tiedekirjasto, 17, Otava, 1961.