Kuusi haastavaa tehtävää: Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset Luxemburgissa 8.–14.4.2013

Esa V. Vesalainen

Luxemburgissa järjestettiin 8.–14.4.2013 toiset Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset. Kyseessä on vakava kansainvälinen kilpailu, jonka tarkoituksena on toimia haastavana, motivoivana ja ilahduttavanakin väliportaana tytöille, jotka tähtäävät kansainvälisiin matematiikkaolympialaisiin. Asiat ovat lähteneet liikkeelle lupaavasti: kilpailut ovat olleet erinomaisesti järjestettyjä ja palaute Suomen kilpailijoilta on ollut hyvin positiivista. Koska kilpailun taustaa ja luonnetta on käsitelty hyvin jo aiemmin tässä lehdessä [1, 2], seuraavassa on vain muutama oleellinen ja maininnanarvoinen asia ennen itse tehtäviä ja ratkaisuita.

Kilpailuun osallistui kaikkiaan 84 kilpailijaa 22 eri maasta. Koko kilpailussa parhaan tuloksen sai Yhdysvaltain vierailijajoukkueen Daniella Wang, joka myös jakoi ensimmäistä sijaa viime vuonna. Toiseksi parhaan tuloksen saavutti Turkin Berfin Şimşek, ja kolmanneksi parhaan Serbian Andela Sarkovic. Täydelliset tulokset löytyvät kilpailun kotisivuilta [3].

Suomea edustivat

- Pihla Karanko Ressun lukiosta,
- Katja Kulmala Meri-Porin lukiosta,
- Neea Palojärvi Päivölän kansanopiston matematiikkalinjalta, ja
- Ella Tamir Helsingin matematiikkalukiosta.

Pihla Karanko ja Katja Kulmala palkittiin kunniamaininnoilla.

Joukkueen johtajana toimi Esa Vesalainen ja varajohtajana Jesse Jääsaari.

Kilpailun formaatti oli sama kuin viime vuonnakin. Yksi merkittävä ero kuitenkin oli: tänä vuonna kumpanakin kilpailupäivänä oli vain kolme tehtävää kun viime vuonna oli neljä. Syynä tähän oli, että näin tehtävien pisteytykseen tarvittiin vähemmän ihmisiä, millä on merkitystä koska pisteyttäjiä kutsutaan ulkomailta asti ja majoitustilaa oli niukasti. Toki pienemmällä määrällä tehtäviä pisteytyskin sujui sitten nopeammin. Joka tapauksessa kokeet olivat tänä vuonna saman mallisia kuin kansainvälisten matematiikkaolympialaistenkin kokeet: tehtävät 1 ja 4 ”helppoja”, tehtävät 2 ja 5 oleellisesti vaikeampia, ja tehtävät 3 ja 6 erityisen haastavia.

Todettakoon vielä mukavana yksityiskohtana, että tehtävissä oli mukana kontribuutio Suomestakin: tehtävä kaksi oli Matti Lehtisen ehdottama.

Ensimmäisen kilpailupäivän tehtävät

1. Kolmion ABC sivua BC jatketaan pisteen C toiselle puolelle sellaiseen pisteeseen D saakka, jolle $CD = BC$. Sivua CA jatketaan pisteen A toiselle puolelle sellaiseen pisteeseen E saakka, jolle $AE = 2CA$. Osoita, että jos $AD = BE$, niin kolmio ABC on suorakulmainen.

2. Etsi kaikki kokonaisluvut m, joilla $m\times m$-neliön voi pilkkoa viideksi suorakaiteeksi, joiden sivujen pituudet ovat kokonaisluvut 1, 2, ..., 10 jossakin järjestyksessä.

3. Olkoon n positiivinen kokonaisluku.

a) Osoita, että on olemassa $6n$ pareittain erisuuren positiivisen kokonaisluvun joukko S, jonka minkä tahansa kahden alkion pienin yhteinen jaettava on enintään $32n^2$.

b) Osoita, että jokaisesta $6n$ pareittain erisuuren positiivisen kokonaisluvun joukosta T löytyy kaksi alkiota, joiden pienin yhteinen jaettava on suurempi kuin $9n^2$.

Toisen kilpailupäivän tehtävät

4. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut a ja b, joilla löytyy kolme peräkkäistä kokonaislukua, joilla polynomin

$$P(n) = \frac{n^5 + a}{b}$$

arvot ovat kokonaislukuja.

5. Olkoon Ω kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä. Ympyrä ω sivuaa sivuja AC ja BC, ja se sivuaa ympyrää Ω sisäpuolelta pisteessä P. Eräs sivun AB suuntainen suora kulkee kolmion ABC läpi ja sivuaa ympyrää ω pisteessä Q.

Osoita, että $\widehat{ACP} = \widehat{QCB}$.

6. Lumikki ja seitsemän kääpiötä asuvat talossaan metsän siimeksissä. Kuudestatoista peräkkäisestä päivästä jokaisena eräät kääpiöt työskentelivät timanttikaivoksessa kun taas loput kääpiöt keräsivät metsässä marjoja. Kukaan kääpiöistä ei tehnyt minkään päivän aikana molempia töitä. Minä tahansa kahtena eri (ei välttämättä peräkkäisenä) päivänä ainakin kolme kääpiötä tekivät kukin molempia töitä. Lisäksi ensimmäisenä päivänä kaikki seitsemän kääpiötä työskentelivät timanttikaivoksessa.

Osoita, että jonakin näistä 16 päivästä kaikki seitsemän kääpiötä keräsivät marjoja.

Ratkaisut

Seuraavassa on yksi ja vain yksi ratkaisu jokaiseen tehtävään. Paljon lisää ratkaisuita ja variantteja löytyy virallisesta ratkaisuvihkosesta [4].

1. Peilataan piste A pisteen C suhteen, jolloin syntyy suunnikas $ABA'D$, jonka lävistäjien leikkauspiste on C. Nyt $A'B = AD = BE$, eli kolmio $\triangle A'BE$ on tasakylkinen. Lisäksi $AE = 2 \cdot AC$, ja $AC = A'C$, eli $AE = AA'$. Tästä seuraa, että A on kolmion $\triangle A'BE$ kärjestä B piirretyn korkeusjanan kantapiste, ja on oltava $BA \perp AC$.

2. Koska yhden suorakaiteen eräs sivu on 10, ja sen on mahduttava $m \times m$-neliön sisälle, on oltava $m \geqslant 10$.

Lisäksi, jos on $m > 10$, niin jokaisesta suorakaiteesta enintään kaksi sivua on $m \times m$-neliön reunalla, ja jos tosiaan kaksi sivua on reunalla, niiden on oltava eripituisia. Toisaalta, $m \times m$-neliön reunan jokainen osa kuuluu jonkin suorakaiteen sivuun, ja siis sen piirille $4m$ pätee

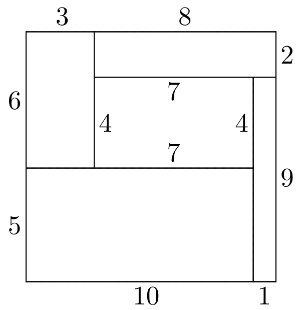
$$4m \leqslant 1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55.$$

Täten $m < 14$. Siis on oltava $10 \leqslant m \leqslant 13$.

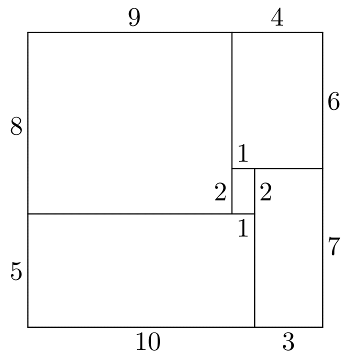
Pienellä kokeilemisella näkee, että arvot $m = 11$ ja $m = 13$ ovat mahdollisia (kts. kuvat 1 ja 2).

Tapauksen $m = 10$ näkee helpohkosti mahdottomaksi. Jollakin suorakaiteista, sanokaamme suorakaiteella R, on sivu, jonka pituus on 10. Jos R jakaisi 10×10-neliön kahteen eri osaan, olisivat molemmat osat suorakaiteita, jotka molemmat olisi peitettävä kahdella suorakaiteella, joilla olisi vain eripituisia sivuja. Selvästi tämä on mahdotonta.

Siispä suorakaiteen R on oltava 10×10-neliön reunalla. Nyt jokin suorakaide pitäisi peittää neljällä erikokoisella suorakaiteella. Ei ole vaikea vakuuttua siitä, että tämäkään ei ole mahdollista jos suorakaiteiden mitoissa ei ole yhtä pitkiä sivuja.



Kuva 1: *Tehtävän 2 tapaus* $m = 11$.



Kuva 2: *Tehtävän 2 tapaus* $m = 13$.

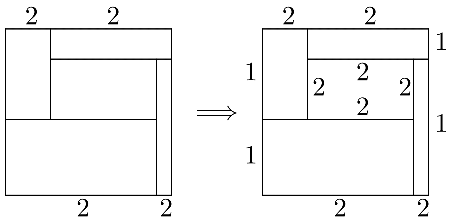
Lopuksi, mahdollisuuden $m = 12$ voi sulkea pois tarkastelemalla sivujen parillisuuksia. Ei ole vaikea vakuuttua siitä, että suorakaiteet on aseteltava neliön sisälle niin, että neliön jokainen sivu koostuu kahden eri suorakaiteen sivusta, ja jakautuu siis luonnollisesti kahteen osaan, ja että neliön sisällä on tasan yksi suorakaide joka ei kosketa neliön sivuja.

Neliön jokaisen sivun osat ovat samaa parillisuutta, ja koska parillisia ja parittomia pituuksia on käytettävissä vain viisi kumpaakin, on neliön kaksi sivua jaettava parillisen mittaisiin osiin, ja loput kaksi sivua jaettava parittoman mittaisiin osiin.

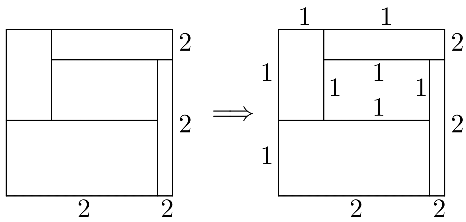
Jos parillisiin osiin jaetut neliön sivut olisivat vastakkaiset sivut, niin neliön sisälle jäävän nelikulmion kaikki sivut olisivat parillisen mittaisia, ja parillisen mittaisia sivuja olisi kuusi, mikä on mahdotonta (kts. kuva 3).

Jos taas parillisiin osiin jaetut neliön sivut olisivat vierekkäiset sivut, niin neliön sisälle jäävän nelikulmion sivut olisivat parittomia, ja parittoman mittaisia sivuja olisi kuusi (kts. kuva 4), mikä on jälleen mahdotonta, ja olemme valmiit.

3. a) Luonnollinen tapa aloittaa on kokeilla lukuja $1, 2, \ldots, 6n$. Tämä ei kuitenkaan toimi, koska luvut $6n$ ja $6n-1$ ovat yhteistekijättömiä, ja niiden pienin



Kuva 3: *Tehtävän 2 tapaus $m = 12$ johtaa ristiriitaan, jos neliössä vastakkaiset sivut jaetaan parillisen mittaisiin osiin.*



Kuva 4: *Tehtävän 2 tapaus $m = 12$ johtaa ristiriitaan, jos neliössä vierekkäiset sivut jaetaan parillisen mittaisiin osiin.*

yhteinen jaettava on siis niiden tulo $36n^2 - 6n = 32n^2 + 2n(2n-3)$, mikä on valitettavasti suurempi kuin $32n^2$ kun $n \geqslant 2$.

Luonnollinen seuraava yritys on harventaa joukkoa isompien lukujen päästä, niin, että joukon isot luvut ovat parillisia. Kokeilemisen jälkeen saattaa päätyä joukkoon

$$S = \{1, 2, \ldots, 4n-1, 4n, 4n+2, 4n+4, \ldots, 8n\},$$

mikä siis sisältää luvut 1, 2, …, $4n$, ja parilliset luvut $4n+2$, $4n+4$, $4n+6$, …, $8n$.

Nimittäin, jos luvut $a \in S$ ja $b \in S$ ovat suurempia kuin $4n$, niin niiden pienin yhteinen jaettava on enintään puolet niiden tulosta, eli

$$[a, b] \leqslant \frac{ab}{2} \leqslant \frac{8n \cdot 8n}{2} = 32n^2.$$

Toisaalta, jos $a \in S$ on pienempi kuin $4n$, ja $b \in S$, niin niiden pienin yhteinen jaettava on pienempi kuin niiden tulo, eli

$$[a, b] \leqslant 4n \cdot 8n = 32n^2.$$

b) Ratkaisun ideana on unohtaa joukon T lukua $3n$ pienemmät elementit; joukosta T löytyy ainakin $3n+1$ lukua, jotka ovat suuruudeltaan vähintään $3n$, sanokaamme luvut

$$3n \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{3n+1}.$$

Koska murtoluvut $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_{3n+1}}$ kuuluvat välille $\left[\frac{1}{a_{3n+1}}, \frac{1}{3n}\right]$, on joidenkin kahden niistä, sanokaamme lukujen $\frac{1}{a_i} < \frac{1}{a_j}$, etäisyyden oltava enintään $\frac{1}{3n}$ välin pituudesta. Nyt

$$0 < \frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_i} \leqslant \frac{1}{3n}\left(\frac{1}{3n} - \frac{1}{a_{3n+1}}\right) < \frac{1}{9n^2}.$$

Koska erotuksen $\frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_i}$ pienin mahdollinen nimittäjä on lukujen a_i ja a_j pienin yhteinen jaettava, ja koska sen on oltava suurempi kuin $9n^2$, olemme valmiit.

4. Olkoot luvulle n kolme peräkkäistä mahdollista kokonaislukuarvoa $x-1$, x ja $x+1$. Ratkaisun ydinajatuksena on todeta, että koska

$$(x-1)^5 \equiv x^5 \equiv (x+1)^5 \equiv -a \pmod{b},$$

jakaa luku b erotukset

$$(x+1)^5 - x^5 = 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1,$$
$$(x-1)^5 - x^5 = -5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1,$$

ja

$$(x+1)^5 - (x-1)^5 = 10x^4 + 20x^2 + 2,$$

sekä niiden kaikki monikerrat, ja edelleen monikertojen summat ja erotukset. Luku b jakaa siis myös lausekkeet

$$5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$$
$$- 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5 - 1 = 20x^3 + 10x,$$

$$2\left(10x^4 + 20x^2 + 2\right) - x\left(20x^3 + 10x\right) = 30x^2 + 4,$$
$$3\left(20x^3 + 10x\right) - 2x\left(30x^2 + 4\right) = 22x,$$

ja lopuksi lausekkeen

$$22\left(5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1\right)$$
$$- \left(5x^3 + 10x^2 + 10x + 5\right) \cdot 22x = 22.$$

Täten luvun b on oltava jokin luvuista 1, 2, 11 ja 22.

Todetaan seuraavaksi, että luku b ei voi olla parillinen, koska luvut $(x+1)^5$ ja x^5 ovat välttämättä eri parillisuutta. Siis b on jompi kumpi luvuista 1 ja 11.

Tapauksessa $b = 1$ luku a voi olla mikä tahansa positiivinen kokonaisluku.

Tapauksessa $b = 11$ lasketaan viidensien potenssien jäännökset modulo 11:

$n:$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n^5:$	0	1	−1	1	1	1	−1	−1	−1	1	−1

Tästä taulukosta nähdään, että luvun a arvo kelpaa täsmälleen silloin kun $a \equiv \pm 1 \pmod{11}$.

5. Olkoot ympyröiden ω ja Ω keskipisteet I ja O. Olkoon suoran CP ja ympyrän ω toinen leikkauspiste D, ja olkoon ℓ ympyrän ω pisteen D kautta kulkeva tangentti. Olkoon X suoran ℓ leikkauspiste ympyrän Ω kaaren AC kanssa, ja olkoon Y suoran ℓ leikkauspiste ympyrän Ω kaaren CB kanssa. Olkoon vielä E suorien AC ja ℓ leikkauspiste, ja Z pisteen A kautta kulkevan suoran ℓ suuntaisen suoran ja ympyrän Ω toinen leikkauspiste.

Kolmiot $\triangle PID$ ja $\triangle POC$ ovat tasakylkisiä, ja siis myös yhdenmuotoisia. Edelleen, koska $ID \perp \ell$, myös $OC \perp \ell$. Erityisesti kaaret XC ja CY ovat yhtä suuret, mistä vuorostaan seuraa, että kaaret AC ja CZ, ja niitä vastaavat kehäkulmat $\widehat{AC}$ ja $\widehat{CZ}$, ovat yhtä suuret. Nyt voimme todeta, että

$$\widehat{DEC} = \widehat{ZAC} = \widehat{CZ} = \widehat{AC} = \widehat{CBA}.$$

Nyt loppu on lähellä: todetaan, että peilauksessa kulman $\widehat{BCA}$ puolittajan CI suhteen suora ℓ kuvautuu suoralle, joka sekä sivuaa ympyrää ω että on yhdensuuntainen suoran AB kanssa. Lisäksi piste D kuvautuu pisteelle Q, ja täten $\widehat{QCB} = \widehat{ACD} = \widehat{ACP}$.

6. Olkoon V kaikkien erilaisten nollista ja ykkösistä muodostettujen seitsemän luvun mittaisten lukujen jono. Joukko V sisältää siis tasan $2^7 = 128$ jonoa. Nämä jonot merkitsevät eri työnjakoja yhden päivän aikana seuraavasti: Numeroimme kääpiöt luvuilla $1, 2, \ldots, 7$, ja jonon i. luku on 0 tai 1 sen mukaan, työskentelikö i. kääpiö timanttien vai marjojen parissa. Erityisesti ensimmäisenä päivänä työnjako oli 0000000, koska kaikki työskentelivät timanttien parissa.

Kaikkiaan työnjaot tarkasteltavien kuudentoista päivän aikana muodostavat joidenkin kuudentoista jonon $d_1, \ldots, d_{16} \in V$ kokoelman. Tiedämme, että yksi näistä jonoista on 0000000, ja niistä mitkä tahansa kaksi eri jonoa poikkeavat ainakin kolmessa eri kohdassa. Merkitsemme $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_{16}\}$. Tehtävämme on siis todistaa, että joukko D sisältää jonon 1111111.

Nyt otamme käyttöön uuden käsitteen: sanomme, että jono $x \in V$ peittää jonon $y \in V$, jos x ja y poikkeavat enintään yhdessä kohdassa. Esimerkiksi jono 1011010 peittää jonot 1011010 ja 1010010 mutta ei jonoa 0001010. Jokainen jono peittää täsmälleen kahdeksan jonoa (mukaan lukien itsensä).

Olkoon $B_i \subseteq V$ niiden jonojen, jotka jono d_i peittää, joukko. Jokainen joukoista $B_1, B_2, \ldots, B_{16}$ sisältää täsmälleen kahdeksan jonoa. Toisaalta, koska kahdella eri jonolla d_i ja d_j on ainakin kolme eriävää kohtaa, ei joukoilla B_i ja B_j ole yhteisiä elementtejä. Joukot $B_1, B_2, \ldots, B_{16}$ sisältävät siis yhteensä $16 \cdot 8 = 128$ jonoa. Toisin sanoen, jokaisen jonon $x \in V$ peittää täsmälleen yksi jonoista $d \in D$.

Seuraavaksi määrittelemme toisenkin uuden käsitteen, painon. Jonon $x \in V$ paino on sen sisältämien ykkösten lukumäärä. Esimerkiksi jonon 1011010 paino on 4. Koska eräs jonoista, sanokaamme d_1, on 0000000, vastaava joukko B_1 sisältää ainoan 0-painoisen jonon ja kaikki 1-painoiset jonot.

Mikään jonoista $d_2, \ldots, d_{16}$ ei voi olla painoa 2, koska muutoin vastaava B_j sisältäisi myös 1-painoisia jonoja, ja siis yhteisiä elementtejä joukon B_1 kanssa. Siten kaikki $\binom{7}{2} = 21$ painoa 2 olevat jonot peittyvät niillä jonoista $d \in D$, jotka ovat painoa 3. Koska jokainen 3-painoinen jono peittää täsmälleen 3 painoa 2 olevaa jonoa, on jonoista $d \in D$ täsmälleen $\frac{21}{3} = 7$ kappaletta painoa 3.

Joukossa V on $\binom{7}{3} = 35$ painoa 3 olevaa jonoa, joista seitsemän kuuluu joukkoon D, ja loput 28 peittyvät joillakin 4-painoisilla jonoilla $d \in D$. Koska jokainen 4-painoinen jono peittää tasan 4 painoa 3 olevaa jonoa, kuuluu joukkoon D täsmälleen $\frac{28}{4} = 7$ kappaletta 4-painoisia jonoja.

Nyt olemme siis todenneet, että joukko D sisältää yhden 0-painoisen, seitsemän 3-painoista, ja seitsemän 4-painoista jonoa. Näiden lisäksi se sisältää vain yhden jonon d lisää, jonka on peitettävä kaikki 6- ja 7-painoiset jonot (koska mikään alempipainoisista joukon D elementeistä ei niitä peitä). Koska 6- ja 7-painoisia jonoja on kaikkiaan 8 kappaletta, on jonon d peitettävä vain ja ainoastaan kyseiset 8 jonoa.

Jonon d on oltava painoa 6 tai 7, koska se peittää jonon 1111111, eikä se voi olla painoa 6, koska muutoin se peittäisi 5-painoisia jonoja. Siis jono d on painoa 7, eli se on 1111111, ja olemme valmiit.

Viitteet

[1] Ernvall-Hytönen, A.-M.: *Suomi lähettää joukkueen tyttöjen matematiikkakilpailuun*, Solmu 3/2011.

[2] Ernvall-Hytönen, A.-M.: *Jännenelikulmioiden juhlaa — Tyttöjen matematiikkaolympialaisten tehtäväsatoa*, Solmu 3/2012.

[3] *Scoreboard for EGMO 2013 in Luxembourg*, `https://www.egmo.org/egmos/egmo2/scoreboard/`.

[4] Leytem, C., P. Haas, J. Lin, C. Reiher, ja G. Woeginger (toim.): *EGMO 2013. Problems with Solutions*, `https://www.egmo.org/egmos/egmo2/solutions.pdf`.