Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset Minskissä 14.–20.4.2015

Mirjam Kauppila
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Esa V. Vesalainen
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Neljännet euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset pidettiin Minskissä Valko-Venäjällä 14.–20.4.2015. Kyseessä on kansainvälinen kilpailu, jonka tarkoituksena on tarjota tytöille haastava ja mielekäs väliporras kohti kansainvälisiä matematiikkaolympialaisia. Kilpailun formaatti onkin samanlainen kuin kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa: kaksi neljän ja puolen tunnin koetta, joissa molemmissa kolme tehtävää, joiden vaikeustaso kasvaa jyrkästi.

Tänä vuonna Suomea kilpailussa edustivat

- Ella Anttila Helsingin matematiikkalukiosta,
- Ella Tamir Helsingin matematiikkalukiosta, ja
- Tara Vaittinen Lahden yhteiskoulusta.

Joukkueen varajohtajana toimi Mirjam Kauppila ja johtajana Esa Vesalainen. Suomen osallistumisen mahdollisti Magnus Ehrnroothin säätiön tuki.

Kilpailun voitti jo neljättä kertaa osallistuva Yhdysvaltain Danielle Wang. Aiemmin hän on voittanut kilpailun kahdesti ja tullut kerran toiselle sijalle. Toinen sija meni Ukrainan Sofiya Dubovalle, joka osallistui toisen kerran ja voitti viimevuotisen kilpailun, ja kolmas sija Ukrainan Nataliia Khotiaintsevalle. Täydelliset tuloslistat löytyvät osoitteesta [2].

Suomen matka alkoi yllättävillä vaikeuksilla. Lentokentällä osoittautui, että joukkue ei päässyt Moskovaan menevään koneeseen. Periaatteessa kansainvälisillä välilaskuilla Šeremetjevon kentällä ei kai pitäisi tarvita Venäjän viisumia, mutta osoittautui, että lento Moskovasta Minskiin olisi kuitenkin lähtenyt passintarkastuksen väärältä puolelta Venäjän maaperältä... Kaikeksi onneksi joukkueelle kuitenkin järjestyi suora lento Minskiin seuraavalle päivälle, ja kaikki sujui lopulta parhain päin.

Tapahtumassa järjestettiin tällä kertaa kaksi ekskursiota. Kaikille yhtenäisellä ekskursiolla käytiin ihmettelemässä Mirin kaupungissa sijaitsevaa Mirin linnaa 16. vuosisadalta, ja ratkaisuita pisteytettäessä kilpailijat kiersivät Minskiä ihmettelemässä sen eri nähtävyyksiä.

Minskin arkkitehtuuri oli erityisen mieleenpainautuvaa. Talot olivat hyvin vaihtelevilta aikakausilta. Suomessa kerrostaloissa on yleensä yksikäsitteinen määrä kerroksia, mutta Minskissä esiintyi paljon rappusmaisia isoja taloja. Valko-Venäjän kansallisen teknillisen yliopiston arkkitehtuurin tiedekunnan rakennus oli erityisen vaikuttava; sen inspiraationa oli toiminut sähkökitara. Valkovenäjän kansalliskirjasto puolestaan esitti timanttia; onhan tieto erittäin kallisarvoista.

Ensimmäisen kilpailupäivän tehtävät

Tehtävä 1. Olkoon $\triangle ABC$ teräväkulmainen kolmio, ja sen pisteestä C piirretyn korkeusjanan kantapiste D. Kulman $\angle ABC$ puolittaja leikkaa suoraa CD pisteessä E ja kolmion $\triangle ADE$ ympäripiirrettyä ympyrää ω pisteessä F. Jos $\angle ADF = 45°$, niin osoita, että CF sivuaa ympyrää ω.

Tehtävä 2. *Domino* on 2×1- tai 1×2-laatta. Selvitä kuinka monella eri tavalla n^2 dominoa voi asettaa $2n \times 2n$-shakkilaudalle ilman päällekkäisyyksiä niin, että jokainen 2×2-neliö sisältää ainakin kaksi peittämätöntä ruutua, jotka ovat samalla rivillä tai samalla sarakkeella.

Tehtävä 3. Olkoot n ja m kokonaislukuja ja suurempia kuin 1, ja olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_m$ positiivisia kokonaislukuja, jotka eivät ole isompia kuin n^m. Osoita, että on olemassa positiiviset kokonaisluvut $b_1, b_2, \ldots, b_m$, jotka eivät ole isompia kuin n, ja joille

$$\operatorname{syt}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m) < n,$$

missä $\operatorname{syt}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ tarkoittaa lukujen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ suurinta yhteistä tekijää.

Toisen kilpailupäivän tehtävät

Tehtävä 4. Selvitä onko olemassa ääretöntä jonoa $a_1, a_2, a_3, \ldots$ positiivisia kokonaislukuja, jolle kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n pätee yhtälö

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}.$$

Tehtävä 5. Olkoot m ja n positiivisia kokonaislukuja, joille $m > 1$. Anastasia osittaa kokonaisluvut 1, 2, ..., $2m$ kaikkiaan m pariksi. Sitten Boris valitsee yhden kokonaisluvun jokaisesta parista ja laskee valitsemiensa kokonaislukujen summan. Osoita, että Anastasia voi valita parit niin, että Borisin saama summa ei voi olla tasan n.

Tehtävä 6. Olkoon H teräväkärkisen kolmion $\triangle ABC$ ortokeskus ja G sen painopiste, ja olkoon $AB \neq AC$. Suora AG leikkaa kolmion $\triangle ABC$ ympäripiirrettyä ympyrää pisteissä A ja P. Olkoon P' pisteen P peilikuva suoran BC suhteen. Osoita, että $\angle CAB = 60°$ jos ja vain jos $HG = GP'$.

Tehtävien kotimaat. Tehtävä 1 on kotoisin Luxemburgista, tehtävä 2 Turkista, tehtävä 3 Amerikan Yhdysvalloista, tehtävä 4 Japanista, tehtävä 5 Alankomaista ja tehtävä 6 Ukrainasta.

Ratkaisut

Seuraavassa on yksi ratkaisu jokaiseen tehtävään. Lisää erilaisia malliratkaisuita löytää englanniksi kilpailun kotisivuilta [1].

1. Aloitetaan ensin pienellä havainnolla ja tarkastellaan kolmion BCD kulman B vastaista ulkoympyrää, eli sitä ympyrää, joka on eri puolella sivua CD kuin piste B, ja joka sivuaa suoria BC, BD ja CD. Olkoon tämän ympyrän keskipiste I. Koska piste I on yhtä etäällä em. suorista, on pisteen I oltava kulman $\angle CBD$ puolittajalla, ja kulmien $\angle DCB$ ja $\angle BDC$ vieruskulmien puolittajilla. Nämä kolme puolittajaa leikkaavat siis samassa pisteessä I. Koska DF puolittaa suoran kulman $\angle CDA$, ja koska BF puolittaa kulman $\angle CBD$, on itse asiassa oltava $F = I$ ja suora CF puolittaa kulman $\angle DCB$ vieruskulman, eli erityisesti

$$\begin{aligned}\angle FCD &= \frac{1}{2}\cdot(180° - \angle DCB)\\ &= \frac{1}{2}\cdot(\angle BDC + \angle CBD)\\ &= 45° + \frac{1}{2}\cdot\angle CBD.\end{aligned}$$

Voimme siis laskea

$$\begin{aligned}\angle EFC &= 180° - \angle FCD - \angle DCB - \angle CBF\\ &= 180° - 45° - \frac{1}{2}\cdot\angle CBD - (90° - \angle CBD)\\ &\quad - \frac{1}{2}\cdot\angle CBD = 45°.\end{aligned}$$

Lopuksi, kehäkulmalause takaa, että CF sivuaa ympyrää ω pisteessä F, koska sen mukaan pisteen F kautta piirretty ympyrän ω tangentti kohtaa suoran FE samassa kulmassa kuin suora CF, eli kulmassa $\angle EDF = 45°$.

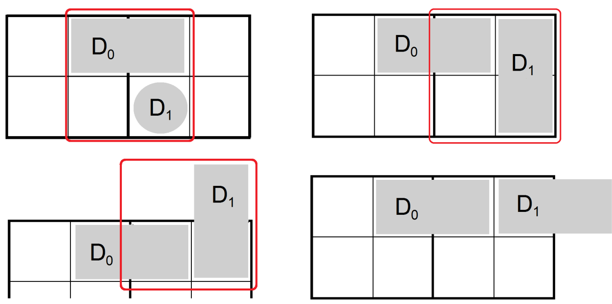
2. Jaamme $2n \times 2n$-ruudukon 2×2-neliöihin siten, että lopputuloksena on 2×2-neliöistä koostuva $n \times n$-ruudukko. Kutsumme näitä 2×2-neliöitä *isoiksi ruuduiksi*. Alkuperäisessä ruudukossa on myös 2×2-neliöitä, jotka eivät ole isoja ruutuja.

Seuraavaksi osoitamme, että jokaisessa isossa ruudussa on täsmälleen yksi domino. Tehtävänannon mukaisesti jokainen 2×2-neliö sisältää ainakin kaksi peittämätöntä ruutua, eli jokaisesta isosta ruudusta peittyy korkeintaan kaksi ruutua. Dominot peittävät yhteensä $2n^2$ ruutua. Jos yhdestä isosta ruudusta peittyisi vain yksi ruutu, tai ei yhtään ruutua, peitettyjä ruutuja olisi laudalla korkeintaan $1 + (n^2 - 1)\cdot 2$, sillä jokaisessa muista isoista ruuduista, joita on $n^2 - 1$, on korkeintaan kaksi peitettyä ruutua. Koska

$$1 + (n^2 - 1)\cdot 2 = 1 + 2n^2 - 2 = 2n^2 - 1 < 2n^2,$$

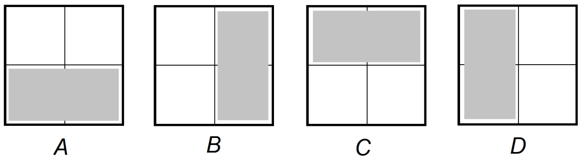
olisi peitettyjä ruutuja vähemmän kuin $2n^2$, mikä tuottaisi ristiriidan. Jokaisessa isossa ruudussa on siis täsmälleen kaksi peitettyä ruutua ja kaksi peittämätöntä.

Tehtävänannon mukaan peittämättömät ruudut ovat samalla rivillä tai samalla sarakkeella, joten peitetyt ruudut ovat myös samalla rivillä tai sarakkeella. Tarkastellaan tapausta jossa jossakin isossa ruudussa nämä ruudut peittyvät eri dominoilla, jolloin molemmat dominot ovat puoliksi toisessa isossa ruudussa. Tarkastellaan toista näistä dominoista, olkoon se D_0. Symmetrisyyden perusteella riittää tarkastella tapausta, jossa D_0 peittää oikeanpuoleisen isoruudun vasemman yläkulman. Oikeanpuoleisessa isoruudussa joko vasen alakulma tai oikea yläkulma on peitetty dominolla D_1. Alla olevasta kuviosta huomaamme, että vain yksi tapa asettaa domino D_1 on tehtävänannon mukainen.

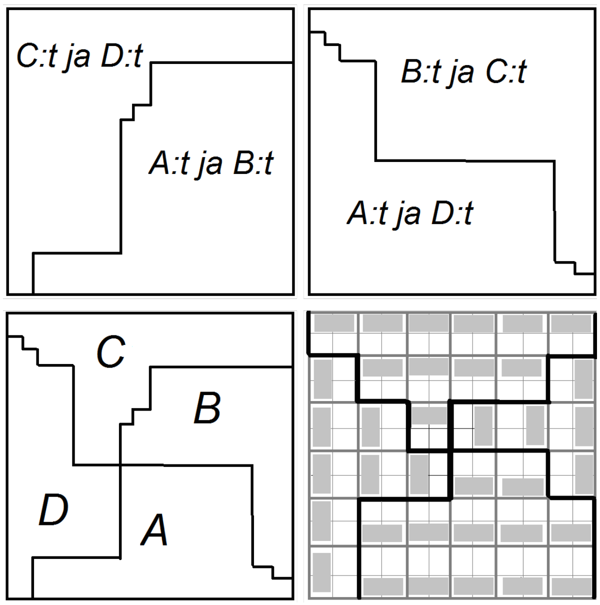


Nyt itse asiassa domino D_1 on samassa asemassa kuin D_0, joten sama päätelmäketju toistamalla löydämme pakollisen paikan dominolle D_2. Eli dominoa D_n seuraa domino D_{n+1}. Kuitenkin dominoita on äärellinen määrä ja laudan oikea reuna tulee vastaan, mikä antaa ristiriidan. Jokaisessa isossa ruudussa on siis oltava tasan yksi domino.

Nyt on neljä vaihtoehtoa miten domino voi asettua isoon ruutuun, ja merkitsemme niitä seuraavan kuvan mukaisesti A, B, C ja D.



Nyt, jos iso ruutu on A tai B, sen alapuolella ja oikealla puolella olevien isojen ruutujen on myös oltava A tai B. Muuten muodostuisi 2×2-neliö, jossa olisi vain yksi peittämätön ruutu. Täten kaikki A- ja B-neliöt ovat pakkautuneet oikeaan alareunaan kuvion mukaisesti *rappuslävistäjän*, joka kulkee vasemmasta alakulmasta oikeaan yläkulmaan, alle.



C- ja D-ruudut ovat rappuslävistäjän yläpuolella. Samalla tavalla voidaan päätellä, että kaikki A- ja D-ruudut ovat vasemmassa alanurkassa toisen rappuslävistäjän alla, ja B- ja C-ruudut sen yläpuolella. Nyt kaikki A-ruudut sijaitsevat molempien rappuslävistäjien alapuolella. Toisaalta B-, C- ja D-ruuduille pätee, että ne sijaitsevat jommankumman rappuslävistäjän yläpuolella. Täten rappuslävistäjien alapuolella sijaitsevat kaikki A-ruudut eikä muuta. Symmetrisellä päättelyllä jokaisella ison ruudun tyypillä on oma alueensa rappuslävistäjien suhteen kuvan mukaisesti. (Voi kuitenkin olla, että rappuslävistäjien alle ei mahdu ainuttakaan A-ruutua, mutta se ei ole ongelma sillä tällöin ruudukko koostuu pelkästään muunlaisista isoista ruuduista.)

Nyt loppu häämöttää. Tehtävänanto muuttuu muotoon ”Kuinka monta erilaista rappuslävistäjäkombinaatiota on olemassa?”. Väitämme, että vasemmasta alakulmasta oikeaan yläkulmaan menevän rappuslävistäjän voi muodostaa $\binom{2n}{n}$ eri tavalla. Rappuslävistäjä voidaan nimittäin ilmaista jonona ykkösiä ja nollia. Rappuslävistäjä alkaa vasemmasta alakulmasta. Jos se menee ylöspäin jonoon lisätään ykkönen, jos se menee oikealle lisätään nolla. Jonossa on yhteensä $2n$ alkiota, joista n kpl ovat ykkösiä. Jokainen jono vastaa yksikäsitteistä rappuslävistäjää ja ykkösten sijainnille jonossa on $\binom{2n}{n}$ vaihtoehtoa, joten eri rappuslävistäjiä on $\binom{2n}{n}$. Toiselle rappuslävistäjälle toimii vastaava päättely. Kun molemmat lävistäjät otetaan samanaikaisesti huomioon vaihtoehtoja on yhteensä $\binom{2n}{n}^2$.

3. Jos $a_1 = a_2 = \ldots = a_m$, niin voimme valita esim. $b_1 = 2$, $b_2 = b_3 = \ldots = b_m = 1$. Oletetaan siis, etteivät luvut ole yhtä suuria. Nyt pienin luvuista $a_1, a_2, \ldots, a_m$ on enintään $n^m - 1$, koska muutoin kaikki luvut olisivat yhtä kuin n^m. Jos pienin luvuista olisi $n^m - 1$, niin jokin toinen luku olisi n^m, ja voisimme valita $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 1$.

Voimme siis huoletta olettaa, että pienin luvuista $a_1, a_2, \ldots, a_m$, sanokaamme a_i (missä $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$), on enintään $n^m - 2$. Oletetaan, että halutunlaisia lukuja $b_1, b_2, \ldots, b_m$ ei ole olemassa. Silloin millä tahansa lukujen $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ valinnalla pätee

$$\operatorname{syt}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m) \geqslant n.$$

Toisaalta,

$$\operatorname{syt}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m) \leqslant a_i + b_i \leqslant n^m - 2 + n,$$

ja siis kyseinen suurin yhteinen tekijä voi saada enintään $n^m - 2 + n - n + 1 = n^m - 1$ eri arvoa.

Luvut $b_1, b_2, \ldots, b_m$ voi valita n^m eri tavalla, jolloin kahdella eri valinnalla saadaan sama suurin yhteinen tekijä, jota voimme merkitä vaikkapa kirjaimella d. Mutta koska $d \geqslant n$, voi jokaisella $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ luvun b_i valita vain enintään yhdellä tavalla siten, että $a_i + b_i$ on jaollinen luvulla d, ja siis luku d voi esiintyä suurimpana yhteisenä tekijänä enintään yhdellä lukujen $b_1, b_2, \ldots, b_m$ valinnalla, mikä tuottaa ristiriidan. Täten ei oletus siitä, ettei halutunlaisia lukuja $b_1, b_2, \ldots, b_m$ ole olemassa, voi pitää paikkaansa, ja olemme valmiit.

4. Oletetaan, että halutunlainen jono on olemassa. Ensinnäkin yhtälöistä välittömästi seuraa, että

$$a_2 < a_3 < a_4 < \ldots,$$

ja siispä myös

$$\begin{aligned}(a_{n+3} - a_{n+1}) - (a_{n+2} - a_n)\\ = (a_{n+3} - a_{n+2}) - (a_{n+1} - a_n)\\ = \sqrt{a_{n+2} + a_{n+1}} - \sqrt{a_n + a_{n-1}} > 0,\end{aligned}$$

kaikilla kokonaisluvuilla $n \geqslant 3$, ja erityisesti siis

$$a_{n+3} - a_{n+1} > a_{n+2} - a_n.$$

Toisaalta samoille n pätee myös

$$\begin{aligned}0 &< a_{n+2} - a_n \\ &= (a_{n+2} + a_{n+1}) - (a_{n+1} + a_n) \\ &= (a_{n+3} - a_{n+2})^2 - (a_{n+2} - a_{n+1})^2 \\ &= (a_{n+3} - a_{n+1}) \\ &\quad \cdot \big((a_{n+3} - a_{n+2}) - (a_{n+2} - a_{n+1})\big).\end{aligned}$$

Viimeiselle tekijälle pätee

$$\begin{aligned}&(a_{n+3} - a_{n+2}) - (a_{n+2} - a_{n+1}) \\ &\quad = \sqrt{a_{n+2} + a_{n+1}} - \sqrt{a_{n+1} + a_n} > 0,\end{aligned}$$

ja kokonaisluvun ollessa kyseessä on siis

$$(a_{n+3} - a_{n+2}) - (a_{n+2} - a_{n+1}) \geqslant 1.$$

Mutta nyt

$$\begin{aligned}a_{n+3} - a_{n+1} &= \frac{a_{n+2} - a_n}{(a_{n+3} - a_{n+2}) - (a_{n+2} - a_{n+1})} \\ &\leqslant a_{n+2} - a_n,\end{aligned}$$

mikä tuottaa ristiriidan. Täten halutunlaista jonoa ei ole olemassa.

5. Oletetaan ensin, että $n < m^2$ tai $n > m^2 + m$. Anastasia voi tällöin valita osituksen

$$\{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots, \{2m - 1, 2m\}.$$

Olkoon Boriksen valitsemien kokonaislukujen summa s. Nyt pätee

$$m^2 = \sum_{i=1}^{m} 2i - 1 \leqslant s \leqslant \sum_{i=1}^{m} 2i = m^2 + m.$$

Nyt kun $n < m^2$ tai $n > m^2 + m$ varmasti $s \neq n$.

Oletetaan seuraavaksi, että $m^2 < n < m^2+m$. Anastasia voi tällä kertaa valita osituksen

$$\{1, 2m\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \ldots, \{2m - 2, 2m - 1\}.$$

Olkoon jälleen s Boriksen valitsemien kokonaislukujen summa. Jos Boris valitsee ensimmäisestä parista luvun 1, pätee

$$s \leqslant 1 + 3 + 5 + \cdots + 2m - 1 = \sum_{i=1}^{m}(2i - 1) = m^2,$$

jolloin $s \neq n$. Toisaalta jos Boris valitsee luvun $2m$, pätee

$$s \geqslant 2m + 2 + 4 + \cdots + 2m - 2 = \sum_{i=1}^{m} 2i = m^2 + m,$$

ja taas päädytään tilanteeseen, jossa $s \neq n$.

Oletetaan lopuksi, että $n = m^2$ tai $n = m^2 + m$. Anastasia voi valita osituksen

$$\{1, 2m-1\}, \{2, 2m\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \ldots, \{2m-3, 2m-2\}.$$

Boris valitsee pareista luvut $a_1, a_2, \ldots, a_m$, missä a_i on toinen i. parin luvuista. Olkoot $s_1 = a_1 + a_2$ ja $s_2 = a_3 + a_4 + \cdots + a_m$. Huomaa että Boriksen valitsemien lukujen summa on $s_1 + s_2$. Nyt pätee

$$\begin{aligned}m^2 - 2m &= 3 + 5 + 7 + \cdots + 2m - 3 \\ &\leqslant s_2 \leqslant 4 + 6 + 8 + \cdots + 2m - 2 = m^2 - m - 2.\end{aligned}$$

Summa s_1 on joko 3, $2m + 1$ tai $4m - 1$. Jos $s_1 = 3$, pätee

$$s_1 + s_2 \leqslant 3 + m^2 - m - 2 = m^2 - m + 1 < m^2,$$

jolloin $s_1 + s_2 \neq n$. Jos taas $s_1 = 2m + 1$, on

$$\begin{aligned}m^2 &< m^2 + 1 = 2m + 1 + m^2 - 2m \\ &\leqslant s_1 + s_2 \leqslant 2m + 1 + m^2 - m - 2 \\ &= m^2 + m - 1 < m^2 + m,\end{aligned}$$

jolloin $s_1 + s_2 \neq n$. Viimeisessä tapauksessa $s_1 = 4m - 1$, jolloin pätee

$$s_1 + s_2 \geqslant 4m - 1 + m^2 - 2m = m^2 + 2m - 1 > m^2 + m,$$

ja $s_1 + s_2 \neq n$.

6. Olkoon O kolmion $\triangle ABC$ ympäripiirretyn ympyrän keskipiste ja R sen säde. Aloitetaan peilaamalla pisteet O, G ja H suoran BC suhteen pisteiksi O', G' ja H', jolloin siis tietenkin $GH = GP'$ jos ja vain jos $G'H' = G'P$. Piste H' sijaitsee ympyrän $\triangle ABC$ ympäripiirretyllä ympyrällä; tämä seuraa vaikkapa siitä, että yhdeksän pisteen ympyrä on kolmion $\triangle ABC$ ympäripiirretyn ympyrän kuva pituudet puolittavassa H-keskisessä homotetiassa.

Kolmio $\triangle H'OP$ on tasakylkinen, ovathan OP ja OH' kolmion $\triangle ABC$ ympäripiirretyn ympyrän säteitä, ja siis $G'H' = G'P$ jos ja vain jos G' sijaitsee kulman $\angle H'OP$ puolittajalla. Tehtävänannon ehto $AB \neq AC$ takaa, että $\angle H'AP = \angle H'AG > 0$. Kehäkulmalauseen nojalla $2 \cdot \angle H'AP = \angle H'OP$, ja varmasti $\angle GO'H = \angle H'OG'$, joten edelleen $GH = GP'$ jos ja vain jos $\angle GO'H = \angle H'AP$.

Olkoon piste D suorien OO' ja BC leikkauspiste, jolloin siis $OD = DO'$ ja $OD \perp BC$. Koska myös $AH' \parallel AH \perp BC$ on oltava $\angle ODG = \angle H'AP$, ja nyt tiedämme, että $GH = GP'$ jos ja vain jos $\angle ODG = \angle GO'H$.

Olkoon seuraavaksi F janan GH keskipiste. Klassinen teoreema Eulerin suorasta sanoo, että pisteet H, G ja O ovat samalla suoralla, piste G on pisteiden H ja O välissä, ja $GH = 2 \cdot OG$. Erityisesti tilanteessamme siis $OG = GF = FH$. Koska D puolittaa janan OO' ja

G janan OF, ovat kolmiot $\triangle ODG$ ja $\triangle OO'F$ yhdenmuotoisia, ja $\angle OO'F = \angle ODG$, ja nyt tiedämme, että $GH = GP'$ jos ja vain jos $\angle OO'F = \angle GO'H$.

Kolmioille $\triangle O'OF$ ja $\triangle O'HG$ pätee $OF = HG$. Oletetaan nyt hetkeksi, että $\angle OO'F = \angle GO'H$. Nyt sinilauseen nojalla kolmioiden $\triangle O'OF$ ja $\triangle O'HG$ ympäripiirretyillä ympyröillä on sama säde. Jos nyt piirretään piste O'' siten, että $OO' \parallel GO''$ ja $FO' \parallel HO''$, niin luonnollisesti pisteen O'' on oltava kolmion $\triangle GO'H$ ympäripiirretyllä ympyrällä, ja siis nelikulmion $GO'O''H$ on oltava symmetrinen janan GH keskinormaalin suhteen. Erityisesti siis $\angle FOO' = \angle HGO'' = \angle O'HG$. Täten kolmio $\triangle O'OH$ on tasakylkinen ja $OO' = O'H = OH' = R$. Toisaalta, jos $OO' = R$, niin silloin varmasti kolmio $\triangle O'OH$ on tasakylkinen, ja $\angle FOO' = \angle O'HG$, jolloin kolmiot $\triangle O'OG$ ja $\triangle O'HG$ ovat yhtenevät (sks), ja $\angle OO'F = \angle GO'H$.

Olemme siis todistaneet, että $GH = GP'$ jos ja vain jos $OO' = R$. Mutta tämä tarkoittaa samaa kuin, että O' on kolmion $\triangle ABC$ ympäripiirretyn ympyrän kehällä. Mutta tämä pitää paikkaansa täsmälleen silloin kun $ABO'C$ on jännenelikulmio, mikä puolestaan pitää paikkaansa täsmälleen silloin kun $\angle BAC + \angle CO'B = 180°$. Mutta kehäkulmalauseen nojalla $\angle CO'B = \angle BOC = 2 \cdot \angle BAC$, eli $GH = GP'$ jos ja vain jos $3 \cdot \angle BAC = 180°$, ja olemme valmiit.

Lähteet ja viitteet

[1] *Solutions for EGMO 2015 in Belarus*, `https://www.egmo.org/egmos/egmo4/solutions.pdf`.

[2] *Scoreboard for EGMO 2015 in Belarus*, `https://www.egmo.org/egmos/egmo4/scoreboard/`.