57. kansainväliset matematiikkaolympialaiset Hongkongissa

Esa V. Vesalainen
Basque Center for Applied Mathematics

57. kansainväliset matematiikkaolympialaiset järjestettiin Hongkongissa 9–16.7.2016. Suomea kilpailussa edustivat Ella Anttila, Hannes Ihalainen, Alvar Kallio, Iiro Kumpulainen, Joose Lehtinen ja Antti Röyskö. Ella Anttila, Iiro Kumpulainen ja Alvar Kallio saivat kunniamaininnat.

Ensimmäisen kilpailupäivän tehtävät

1. Kolmiolla BCF on suora kulma kärjessä B. Olkoon A piste suoralla CF siten, että $FA = FB$ ja piste F sijaitsee pisteiden A ja C välissä. Valitaan piste D siten, että $DA = DC$ ja AC puolittaa kulman $\angle DAB$. Valitaan piste E siten, että $EA = ED$ ja AD puolittaa kulman $\angle EAC$. Olkoon M janan CF keskipiste. Olkoon X se piste, jolla $AMXE$ on suunnikas (missä $AM \parallel EX$ ja $AE \parallel MX$). Osoita, että suorat BD, FX ja ME kulkevat saman pisteen kautta.

2. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille $n\times n$-ruudukon jokaiseen ruutuun voi asettaa yhden kirjaimista I, M ja O siten, että:

- jokaisella rivillä ja jokaisella sarakkeella yksi kolmasosa kirjaimista on I-kirjaimia, yksi kolmasosa M-kirjaimia ja yksi kolmasosa O-kirjaimia; ja
- jokaisella lävistäjällä, jolla ruutujen lukumäärä on kolmella jaollinen, yksi kolmasosa kirjaimista on I-kirjaimia, yksi kolmasosa M-kirjaimia ja yksi kolmasosa O-kirjaimia.

Huomautus: Numeroimme $n\times n$-ruudukon rivit ja sarakkeet luonnollisella tavalla luvuilla $1, 2, \ldots, n$. Täten jokainen ruutu vastaa positiivisten kokonaislukujen paria (i, j), missä $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Kun $n > 1$, ruudukossa on $4n - 2$ *lävistäjää*, jotka edustavat kahta eri lajia. Ensimmäisen lajin lävistäjä koostuu niistä ruuduista (i, j), joissa $i + j$ on jokin vakio, kun taas toisen lajin lävistäjä koostuu niistä ruuduista (i, j), missä $i - j$ on jokin vakio.

3. Olkoon $P = A_1A_2 \ldots A_k$ tason konveksi monikulmio. Kärkien A_1, A_2, …, A_k koordinaatit ovat kokonaislukuja ja ne sijaitsevat erään ympyrän kehällä. Olkoon S monikulmion P ala. On annettu pariton positiivinen kokonaisluku n siten, että monikulmion P sivujen pituuksien neliöt ovat kokonaislukuja ja jaollisia luvulla n. Osoita, että $2S$ on kokonaisluku ja jaollinen luvulla n.

Toisen kilpailupäivän tehtävät

4. Positiivisista kokonaisluvuista koostuva joukko on *sulotuoksuinen*, jos se sisältää ainakin kaksi alkiota ja jokaisella sen alkioista on yhteinen alkulukutekijä ainakin yhden toisen alkion kanssa. Olkoon $P(n) = n^2 + n + 1$. Mikä on pienin mahdollinen positiivisen kokonaisluvun b arvo, jolla on olemassa ei-negatiivinen kokonaisluku a siten, että joukko

$$\{P(a + 1), P(a + 2), \ldots, P(a + b)\}$$

on sulotuoksuinen?

Huomautus. Tässä sanan ”sulotuoksuinen” takana on se seikka, että Hong Kong tarkoittaa suurin piirtein samaa kuin ”sulotuoksuinen satama”.

5. Liitutaululle kirjoitetaan yhtälö

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016),$$

missä kummallakin puolella on 2016 lineaarista tekijää. Mikä on pienin mahdollinen k, jolla on mahdollista pyyhkiä pois täsmälleen k kappaletta näistä 4032 lineaarisesta tekijästä siten, että yhtälön kummallekin puolelle jää jäljelle ainakin yksi tekijä ja että lopputuloksena syntyvällä yhtälöllä ei ole reaalilukuratkaisuita?

6. Tasossa on $n \geqslant 2$ janaa siten, että mitkä tahansa kaksi janaa leikkaavat toisensa, ja mitkään kolme janaa eivät kulje saman pisteen kautta. Geoffin on valittava jokaisesta janasta toinen sen päätepisteistä ja asetettava sille sammakko niin, että se katsoo janan toista päätepistettä. Sitten hän taputtaa käsiään $n - 1$ kertaa. Joka kerta, kun hän taputtaa, jokainen sammakko välittömästi hyppää eteenpäin janansa seuraavalle leikkauspisteelle. Mikään sammakoista ei koskaan vaihda hyppysuuntaansa. Geoff haluaisi asettaa sammakot siten, että mitkään kaksi niistä eivät milloinkaan ole samassa leikkauspisteessä samaan aikaan.

1. Osoita, että Geoff voi aina toteuttaa toivomuksensa kun n on pariton.

2. Osoita, että Geoff ei koskaan voi toteuttaa toivomustaan kun n on parillinen.

Tehtävien kotimaat. Tehtävä 1 oli Belgian lähettämä, tehtävä 2 Australian, tehtävät 3 ja 5 Venäjän, tehtävä 4 Luxemburgin, ja tehtävä 6 Tšekin.

Ratkaisut

1. Koska kolmiot $\triangle ABF$ ja $\triangle ACD$ ovat yhdenmuotoiset, on

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AD}.$$

Koska lisäksi $\angle BAC = \angle FAD$, ovat myös kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle AFD$ yhdenmuotoiset. Voimme laskea

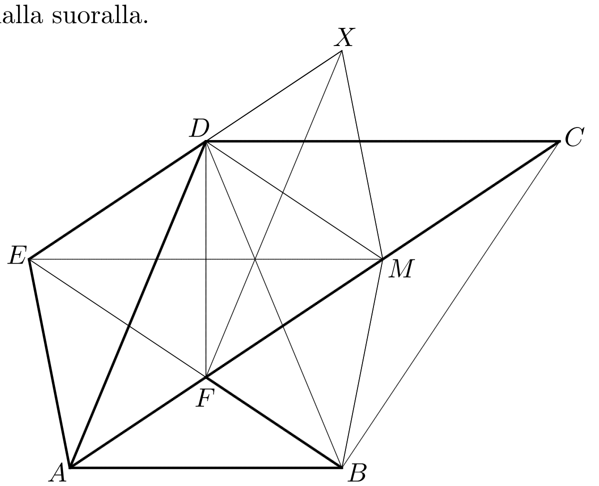
$$\begin{aligned}\angle DFA = \angle CBA = 90^\circ + \angle BAC = 90^\circ + \angle DAE \\ = 90^\circ + \frac{180^\circ - \angle AED}{2} = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AED,\end{aligned}$$

ja muistaen, että $EA = ED$, kehäkulmalauseen nojalla piste F sijaitsee E-keskisellä EA-säteisellä ympyrällä, ja aivan erityisesti on $EF = EA = ED$. Koska lisäksi

$$\angle EFA = \angle FAE = 2\angle BAC = \angle BFC,$$

näemme, että pisteet B, F ja E ovat samalla suoralla.

Koska $\angle EDA = \angle MAD$, kohtaa suora AD molemmat suorista AM ja ED samassa kulmassa, jolloin $ED \parallel AM \parallel EX$, ja pisteet E, D ja X lepäävät samalla suoralla.



Kuva. Vahvennetuilla viivoilla piirretyt kolmiot ovat tehtävänannon oletusten nojalla yhdenmuotoisia tasakylkisiä kolmioita.

Koska M on suorakulmaisen kolmion $\triangle BFC$ hypotenuusan keskipiste, on $MF = MB = MC$. Nyt kolmiot $\triangle EAF$ ja $\triangle MBF$ ovat tasakylkisiä kolmioita, joiden kannat AF ja BF ovat yhtä pitkät, ja molempien kantakulmat ovat suuruuksiltaan $2\angle BAC$. Täten kolmiot $\triangle EAF$ ja $\triangle MBF$ ovat yhteneviä.

Nyt $MB = EA = XM$, ja toisaalta

$$BE = BF + FE = AF + FM = AM = EX,$$

ja siten kolmiot $\triangle EMB$ ja $\triangle EMX$ ovat yhtenevät.

Lopuksi, koska $EF = ED$, ovat janat FX ja DB keskenään symmetriset suoran EM suhteen, mistä toivottu johtopäätös seuraakin.

2. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$ halutunlainen, ja oletetaan, että meille on annettu halutunlainen $n \times n$-kirjainruudukko. Jos jokaisella rivillä on $k \in \mathbb{Z}_+$ kappaletta kutakin kirjainta, on tietenkin kullakin rivillä yhteensä $3k$ kirjainta, ja siis $n = 3k$.

Jaetaan ruudukko nyt 3×3-aliruudukoihin luonnollisella tavalla — niitä syntyy siis n^2 kappaletta — ja otetaan erityisesti tarkasteluun näiden 3×3-aliruudukoiden keskimmäiset ruudut. Kutsutaan näitä ruutuja vaikkapa *tärkeiksi.* Kutsutaan lisäksi niitä rivejä, sarakkeita ja lävistäjiä, jotka kulkevat tärkeän ruudun kautta *tärkeiksi* tai *tärkeiksi linjoiksi.* Ratkaisun ajatuksena on laskea kahdesti modulo 3 se luku N, joka kertoo niiden parien $\langle \ell, r \rangle$ lukumäärän, missä ℓ on tärkeä linja ja r on sellainen linjan ℓ ruutu, jossa majailee M-kirjain.

Ensinnäkin, M-kirjaimia on taulukossa kaikkiaan $3k^2$ kappaletta. Jokainen niistä kuuluu joko täsmälleen yhteen tai täsmälleen neljään sellaiseen riviin, sarakkeeseen tai lävistäjään, joka kulkee tärkeän ruudun kautta. Koska $4 \equiv 1 \pmod 3$, on nyt oltava $N \equiv 3k^2 \equiv 0 \pmod 3$.

Toisaalta, jokainen tärkeä rivi sisältää täsmälleen k kappaletta M-kirjaimia, ja tärkeitä rivejä on täsmälleen k kappaletta. Samoin tärkeitä sarakkeita on k kappaletta, ja jokainen niistä sisältää täsmälleen k kappaletta M-kirjaimia. Vasemmalta ylhäältä oikealle alas suuntaavilla tärkeillä lävistäjillä on M-kirjaimia yhteensä

$$1+2+3+\ldots+(k-1)+k+(k-1)+\ldots+3+2+1 = k^2$$

kappaletta. Tässä yhteydessä on tärkeää, että tärkeitä lävistäjiä ovat täsmälleen ne, mitkä kulkevat jonkin tärkeän ruudun kautta. Samoin voimme käsitellä vasemmalta alhaalta oikealle ylös suuntaavat tärkeät lävistäjät. Täten $N \equiv k^2 + k^2 + k^2 + k^2 \equiv 4k^2 \equiv k^2 \pmod 3$.

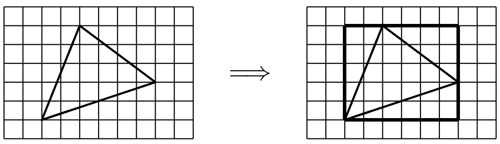
Yhdistämällä kaksi saatua kongruenssia saadaan $k^2 \equiv N \equiv 0 \pmod 3$, ja siis luvun k on oltava jaollinen kolmella, ja edelleen luvun n on oltava jaollinen yhdeksällä. Riittää osoittaa, että jokaisella yhdeksällä jaollisella $n \in \mathbb{Z}_+$ löytyy halutunlainen ruudukko.

Mutta tämä ei ole kovin hankalaa. Ensinnäkin, on helppo tarkistaa, että seuraava 9×9-ruudukko on halutunlainen:

I	I	I	M	M	M	O	O	O
M	M	M	O	O	O	I	I	I
O	O	O	I	I	I	M	M	M
I	I	I	M	M	M	O	O	O
M	M	M	O	O	O	I	I	I
O	O	O	I	I	I	M	M	M
I	I	I	M	M	M	O	O	O
M	M	M	O	O	O	I	I	I
O	O	O	I	I	I	M	M	M

Lopuksi, jos $n \in \mathbb{Z}_+$ on jaollinen yhdeksällä, niin halutunlainen $n \times n$-ruudukko saadaan tekemällä yllä annetusta taulukosta $(n/9)^2$ kopiota ja asettamalla ne $n/9 \times n/9$-ruudukoksi.

3. Todistetaan ensin, että $2S \in \mathbb{Z}$. Koska monikulmion voi pilkkoa lävistäjillä kolmioiksi, tämä seuraa suoraan seuraavasta havainnosta: jos kolmion Δ kärkien koordinaatit ovat kokonaislukuja, niin kyseisen kolmion ala on kokonaisluvun puolikas. Tämän näkee vaikkapa piirtämällä kolmion kärkien kautta sellaisen suorakaiteen, jonka sivut ovat koordinaattiakseleiden suuntaiset ja jonka kärkien koordinaatit ovat kokonaislukuja. Tälläin kolmion Δ ala saadaan laskemalla suorakaiteen ala (joka on selvästi kokonaisluku), ja vähentämällä siitä sellaisten suorakulmaisten kolmioiden aloja, joiden kärjet ovat kokonaislukukoordinaattisia pisteitä ja kateetit koordinaattiakseleiden suuntaisia, ja joiden alat siis selvästi ovat kokonaislukujen puolikkaita.



Kuva. Kuinka todeta, että kolmion, jonka kärkien koordinaatit ovat kokonaislukuja, alan on oltava kokonaisluvun puolikas.

Tehtävän varsinainen haaste on siis todistaa, että pätee $n \mid 2S$. Olkoon monikulmiolla k kärkea ja nimetään monikulmion kärjet $A_1, A_2, \ldots, A_k$, tässä järjestyksessä ympäripiirretyn ympyrän kehää pitkin. Riittää selvästi osoittaa tulos siinä tapauksessa, missä n on jonkin parittoman alkuluvun p potenssi p^t, missä $t \in \mathbb{Z}_+$.

Käytämme induktiota monikulmion kärkien lukumäärän k suhteen. Olkoon ensin $k = 3$, ja olkoot sivujen pituuksien neliöt an, bn ja cn, missä $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin Heronin kaavan nojalla

$$\begin{aligned}16S^2 &= n^2\sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}\\ &\quad\cdot\sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(-\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}\\ &= n^2\left(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2\right).\end{aligned}$$

Koska nyt $n^2 \mid 16S^2$ ja n on pariton, on $n \mid S$.

Olkoon seuraavaksi $k \geqslant 4$, ja oletetaan, että väite on jo todistettu vähemmän kuin k kärkeä omaaville monikulmioille.

Jos minkään monikulmiomme lävistäjän pituuden neliö on jaollinen luvulla n, voimme tätä lävistäjää pitkin pilkkoa sen kahdeksi pienemmäksi monikulmioksi, joille väite induktio-oletuksen mukaan pätee erikseen, ja on selvää, että asia on kunnossa. Voimme siten olettaa, ettei minkään monikulmion lävistäjän pituuden neliö ole jaollinen luvulla n. Tämä oletus tulee johtamaan ristiriitaan.

Kun $r \in \mathbb{Z}_+$, merkitsemme alkuluvun p eksponenttia luvun r alkutekijöihinjaossa $\nu_p(r)$. Osoitamme, että jokaiselle $m \in \{2, 3, \ldots, k-1\}$ pätee

$$\nu_p(|A_1A_m|^2) > \nu_p(|A_1A_{m+1}|^2), \qquad (*)$$

mistä välittömästi seuraa ristiriita

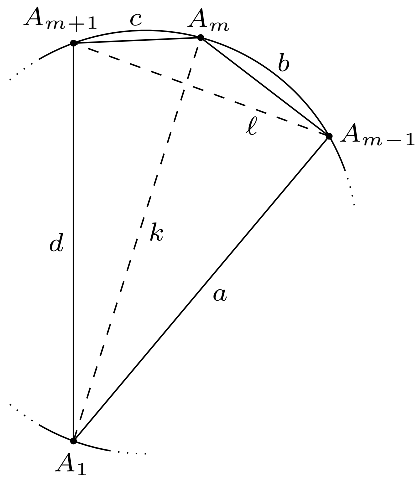
$$\begin{aligned}\nu_p(|A_1A_2|^2) \geqslant t > \nu_p(|A_1A_3|^2) > \nu_p(|A_1A_4|^2)\\ > \nu_p(|A_1A_5|^2) > \ldots > \nu_p(|A_1A_k|^2) \geqslant t,\end{aligned}$$

missä kaksi ensimmäistä epäyhtälöä seuraavat oletuksista $p^t \mid |A_1A_2|^2$ ja $p^t \nmid |A_1A_3|^2$, ja viimeinen oletuksesta $p^t \mid |A_1A_k|^2$.

Meidän pitää vielä todistaa epäyhtälö $(*)$ annetulle $m \in \{3, 4, \ldots, k-1\}$. Käytämme induktiota, ja oletamme, että $\nu_p(|A_1A_{m-1}|^2) > \nu_p(|A_1A_m|^2)$. Soveltamalla Ptolemaiosin lausetta jännenelikulmioon $A_1A_{m-1}A_mA_{m+1}$ näemme, että

$$kl = ac + bd,$$

missä a, b, c ja d ovat nelikulmion sivujen pituudet $|A_1A_{m-1}|$, $|A_{m-1}A_m|$, $|A_mA_{m+1}|$ ja $|A_{m+1}A_1|$, ja k ja ℓ ovat sen lävistäjien pituudet $|A_1A_m|$ ja $|A_{m-1}A_{m+1}|$ seuraavan kuvan mukaisesti.



Nyt siis tietenkin myös

$$b^2d^2 = a^2c^2 + k^2\ell^2 - 2ack\ell,$$

mistä edelleen seuraa, että $2ack\ell \in \mathbb{Z}$. Koska $\nu_p(a^2) > \nu_p(k^2)$ induktio-oletuksen nojalla, ja koska $\nu_p(c^2) \geqslant t > \nu_p(\ell^2)$, on myös $\nu_p(a^2c^2) > \nu_p(k^2\ell^2)$, jolloin selvästi myös $\nu_p(2ack\ell) > \nu_p(k^2\ell^2)$, ja on oltava $\nu_p(b^2d^2) = \nu_p(k^2\ell^2)$. Mutta koska lisäksi $\nu_p(b^2) \geqslant t > \nu_p(\ell^2)$, on oltava $\nu_p(d^2) < \nu_p(k^2)$, mikä olikin todistettava.

4. Aloitetaan tekemällä joitakin havaintoja polynomin P arvoista.

Havainto A. Luvuilla $P(n)$ ja $P(n+1)$ ei ole yhteistä alkulukutekijää millään $n \in \mathbb{Z}$.

Todistus. Jos $d \in \mathbb{Z}_+$ on lukujen $P(n)$ ja $P(n+1)$ yhteinen tekijä, niin d jakaa myös luvun

$$(n+2)\,P(n) - n\,P(n+1) = 2,$$

ja siis $d = 1$ tai $d = 2$. Mutta luvut $P(n)$ ja $P(n+1)$ ovat selvästi parittomia, eli luvun d on oltava pariton myös, ja siten $d = 1$.

Havainto B. Olkoon $n \in \mathbb{Z}$. Tällöin lukujen $P(n)$ ja $P(n+2)$ ainoa mahdollinen yhteinen alkulukutekijä on 7.

Todistus. Jos alkuluku p jakaa molemmat luvuista $P(n)$ ja $P(n+2)$, niin sen on myös jaettava luku

$$(2n+7)\,P(n) - (2n-1)\,P(n+2) = 14 = 2 \cdot 7,$$

eli on oltava $p = 2$ tai $p = 7$. Mutta koska luvut $P(n)$ ja $P(n+2)$ ovat parittomia, voi olla vain $p = 7$.

Havainto C. Olkoon $n \in \mathbb{Z}$. Tällöin lukujen $P(n)$ ja $P(n+3)$ ainoa mahdollinen yhteinen alkulukutekijä on 3.

Todistus. Jos alkuluku p jakaa molemmat luvuista $P(n)$ ja $P(n+3)$, niin sen on jaettava myös luku

$$(n+5)\,P(n) - (n-1)\,P(n+3) = 18 = 2 \cdot 3^2,$$

eli $p = 2$ tai $p = 3$. Mutta jälleen, koska luvut $P(n)$ ja $P(n+3)$ ovat parittomia, voi olla vain $p = 3$.

Tehtävän 4 ratkaisu. Olkoot siis $a \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ ja $b \in \mathbb{Z}_+$ sellaisia, että joukko

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

on sulotuoksuinen. Tietenkin $b \geqslant 2$. Toisaalta ei voi olla $b = 2$, koska luvuilla $P(a+1)$ ja $P(a+2)$ ei havainnon A nojalla ole yhteisiä alkutekijöitä, ja siten $b \geqslant 3$. Mutta ei voi myöskään olla $b = 3$, koska havainnon A nojalla luvulla $P(a+2)$ ei voi olla yhteisiä alkutekijöitä kummankaan luvuista $P(a+1)$ ja $P(a+3)$ kanssa, ja siten on oltava $b \geqslant 4$.

Oletetaan sitten, että $b = 4$. Luvulla $P(a+2)$ ei havainnon A nojalla ole yhteisiä alkutekijöitä lukujen $P(a+1)$ ja $P(a+3)$ kanssa, ja luvulla $P(a+3)$ ei ole yhteisiä alkutekijöitä lukujen $P(a+2)$ ja $P(a+4)$ kanssa. Siispä luvuilla $P(a+2)$ ja $P(a+4)$ on oltava yhteinen alkutekijä, samoin luvuilla $P(a+1)$ ja $P(a+3)$. Mutta havainnon B nojalla tämän alkutekijän on oltava 7, jolloin 7 on molempien lukujen $P(a+2)$ ja $P(a+3)$ alkutekijä, vastoin havaintoa A. Täten on oltava $b \geqslant 5$.

Oletetaan sitten seuraavaksi, että $b = 5$. Luvulla $P(a+3)$ ei havainnon A nojalla ole yhteisiä alkutekijöitä lukujen $P(a+2)$ ja $P(a+4)$ kanssa, joten sillä on oltava yhteinen alkutekijä luvun $P(a+1)$ tai luvun $P(a+5)$ kanssa, ja havainnon B nojalla luku $P(a+3)$ on jaollinen seitsemällä. Mutta samassa hengessä luvulla $P(a+2)$ ei ole yhteistä alkutekijää lukujen $P(a+1)$ ja $P(a+3)$ kanssa havainnon A nojalla. Jos luvuilla $P(a+2)$ ja $P(a+4)$ olisi yhteinen alkutekijä, olisi se havainnon B nojalla 7, jolloin luvuilla $P(a+2)$ ja $P(a+3)$ olisi yhteinen tekijä 7, vastoin havaintoa A. Siispä luvuilla $P(a+2)$ ja $P(a+5)$ on oltava yhteinen alkulukutekijä, jonka havainnon C nojalla on oltava 3.

Mutta aivan samoin luvulla $P(a+4)$ ei havainnon A nojalla ole yhteisiä alkutekijöitä lukujen $P(a+3)$ eikä $P(a+5)$ kanssa, ja jos sillä olisi yhteinen alkutekijä luvun $P(a+2)$ kanssa, olisi sen oltava havainnon B nojalla 7, jolloin luvut $P(a+3)$ ja $P(a+4)$ olisivat molemmat jaollisia luvulla 7, vastoin havaintoa A. Täten luvuilla $P(a+1)$ ja $P(a+4)$ on oltava yhteinen alkulukutekijä, jonka havainnon C nojalla on oltava 3. Mutta nyt luvut $P(a+1)$ ja $P(a+2)$ ovat molemmat jaollisia luvulla 3, vastoin havaintoa A, ja toteamme, että on oltava $b \geqslant 6$.

Mutta arvo $b = 6$ onkin sopiva. Esimerkiksi luvut

$$P(196) = 38613, \quad P(197) = 39007, \quad P(198) = 39403,$$
$$P(199) = 39801, \quad P(200) = 40201, \quad P(201) = 40603$$

muodostavat sulotuoksuisen joukon, sillä luvuilla 38613 ja 39801 yhteinen tekijä 3, luvuilla 39007 ja 40603 yhteinen tekijä 19, sekä luvuilla 39403 ja 40201 yhteinen tekijä 7.

5. Jos poistamme vähemmän kuin 2016 tekijää, niin silloin varmasti molemmille puolille jää sama tekijä $x - n$ jollakin $n \in \{1, 2, \ldots, 2016\}$, jolloin yhtälöllä on reaalinen ratkaisu $x = n$. Siksi on poistettava ainakin 2016 tekijää. Tulemme osoittamaan, että riittää poistaa sopivasti valitut 2016 tekijää — nimittäin vasemmalta puolelta ne tekijät $x - n$, missä $n \in \{1, 2, \ldots, 2016\}$ ja $n \equiv 2$ tai $3 \pmod 4$, ja oikealta puolelta ne tekijät $x - n$, missä $n \in \{1, 2, \ldots, 2016\}$ ja $n \equiv 1$ tai $4 \pmod 4$. Toisin sanoen, osoitamme, ettei yhtälöllä

$$\begin{aligned}
&(x-1)\,(x-4)\,(x-5)\,(x-8)\,(x-9)\,(x-12) \\
&\qquad \cdots (x-2009)\,(x-1012)\,(x-2013)\,(x-2016) \\
&= (x-2)\,(x-3)\,(x-6)\,(x-7)\,(x-10)\,(x-11) \\
&\qquad \cdots (x-2010)\,(x-2011)\,(x-2014)\,(x-2015)
\end{aligned}$$

ole reaalilukuratkaisuita.

Selvästikään mikään luvuista $x \in \{1, 2, \ldots, 2016\}$ ei voi olla yhtälön ratkaisu, sillä jokaisella näistä arvoista yhtälön toinen puoli häviää kun taas toinen puoli ei häviä.

Myöskään mikään luvuista $x \in]1, 2[\cup]3, 4[\cup]5, 6[\cup]7, 8[\cup \ldots \cup]2013, 2014[\cup]2015, 2016[$ ei voi olla ratkaisu, sillä näillä arvoilla yhtälön vasemman puolen lauseke on negatiivinen, kun taas oikea puolen lauseke on positiivinen.

Olkoon sitten $x \in]-\infty, 1[\cup]4, 5[\cup]8, 9[\cup]12, 13[\cup \ldots \cup]2012, 2013[\cup]2016, \infty[$. Nämä arvot eivät ole ratkaisuita, sillä vaikka näillä arvoilla yhtälön molemmat puolet ovat positiivisia reaalilukuja, vasempi puoli on itseisarvoltaan oikeaa puolta pienempi. Tämä seuraa vertaamalla puolia kahden vierekkäisen tekijän pareissa. Nimittäin, jos $j \in \{0, 1, 2 \ldots, 503\}$, niin tekijät $(x - (4j + 1))\,(x - (4j + 4))$ ja $(x - (4j + 2))\,(x - (4j + 3))$ ovat molemmat positiivisia, ja lisäksi

$$\begin{aligned}
&\big(x - (4j + 1)\big)\,\big(x - (4j + 4)\big)\\
&\quad = x^2 - (8j + 5)\,x + \big(16j^2 + 20j + 4\big)\\
&\quad < x^2 - (8j + 5)\,x + \big(16j^2 + 20j + 6\big)\\
&\quad = \big(x - (4j + 2)\big)\,\big(x - (4j + 3)\big).
\end{aligned}$$

Olkoon lopuksi $x \in]2, 3[\cup]6, 7[\cup]10, 11[\cup \ldots \cup]2010, 2011[\cup]2014, 2015[$. Näillä arvoilla molemmat puolet ovat negatiiviset, mutta nyt oikean puolen itseisarvo on pienempi kuin vasemman puolen. Tämä vaatii molemman puolen ensimmäisen ja viimeisen tekijän käsittelyn erikseen: tietenkin

$$0 < x - 2 < x - 1 \quad \text{ja} \quad x - 2016 < x - 2015 < 0.$$

Loppuja termejä voi jälleen vertailla puolittain kahden vierekkäisen termin pareissa, kuten aiemmin. Olkoon $j \in \{1, 2, \ldots, 503\}$. Tällöin tekijät $(x - 4j)\,(x - (4j + 1))$ ja $(x - (4j - 1))\,(x - (4j + 2))$ ovat molemmat positiivisia ja

$$\begin{aligned}
&\big(x - (4j - 1)\big)\,\big(x - (4j + 2)\big)\\
&\quad = x^2 - (8j + 1)\,x + \big(16j^2 + 4j - 2\big)\\
&\quad < x^2 - (8j + 1)\,x + \big(16j^2 + 4j\big)\\
&\quad = \big(x - 4j\big)\,\big(x - (4j + 1)\big).
\end{aligned}$$

6. Piirretään ympyrä niin, että kaikki n janaa ovat kokonaan sen sisäpuolella, ja jatketaan niitä molemmilta puolilta, kunnes niiden päätepisteet ovat ympyrän kehällä. Tämä helpottaa janoista ja niiden pääpisteistä puhumista. Numeroidaan janojen päätepisteet ympyrän kehää pitkin 0, 1, 2, 3, …, $2n - 1$.

Olkoon ensin n parillinen. Jos sammakot on asetettu niin, että ympyrän kehällä kahdelta vierekkäiseltä päätepisteeltä, kutsukaamme niitä vaikkapa nimillä A ja B, löytyy sammakko, niin silloin Geoffin toivomus ei toteudu. Tämän nähdäksemme, olkoon P päätepisteitä A ja B vastaavien janojen leikkauspiste. Oleellinen havainto on tämä: jokainen jana, joka leikkaa janan AP, leikkaa myös välttämättä janan BP, ja siten molemmilta janoilta AP ja BP löytyy yhtä monta leikkauspistettä, ja pisteistä A ja B lähtevät sammakot löytävät toisensa pisteestä P samaan aikaan.

Oletetaan nyt, että sammakot on aseteltu Geoffin toivomuksen kannalta suotuisalla tavalla. Ilman yleisyyden menettämistä voimme olettaa, että eräs sammakoista on asetettu päätepisteeseen 0. Koska nyt pääpisteessä 1 ei voi olla sammakkoa, täytyy sellainen olla vastaavan janan toisessa päätepisteessä $n + 1$. Samassa hengessä, koska pisteessä $n + 2$ ei ole sammakkoa, täytyy vastaavan janan toisesta päätepisteestä 2 löytyä sellainen. Jatkamalla tätä argumenttia näemme, että n sammakkoa on välttämättä asetettu päätepisteisiin 0, $n + 1$, 2, $n + 3$, 4, $n + 5$, …, $n - 2$, $2n - 1$. Mutta nyt vierekkäisiltä päätepisteiltä 0 ja $2n - 1$ löytyy sammakot, eli olemme päätyneet ristiriitaan, ja tehtävän osio b) on ratkaistu.

Olkoon sitten seuraavaksi n pariton. Asetamme sammakot päätepisteisiin 0, 2, 4, 6, 8, …, $2n - 2$. Koska päätepistettä i vastaava toinen päätepiste on $\equiv n + i \pmod{2n}$, ja n oli pariton, ei ole vaikea vakuuttua siitä, että jokaiselta janalta löytyy täsmälleen yksi sammakko, kuten pitääkin. Otetaan tarkasteluun joidenkin kahden sammakon aloituspäätepisteet A ja B. Olkoon jälleen P päätepisteitä A ja B vastaavien janojen leikkauspiste. Haluamme osoittaa, että pisteistä A ja B lähtevät sammakot käyvät pisteessä P eri aikoina. Tämän osoittamiseksi riittää osoittaa, että janoilta AP ja BP löytyy eri määrä leikkauspisteitä. Tämän puolestaan todistamme osoittamalla, että janoilta AP ja BP löytyy yhteensä pariton määrä leikkauspisteitä (piste P pois lukien).

Tarkastellaan niitä $n - 2$ janaa, jotka jäävät jäljelle, kun poistamme päätepisteitä A ja B vastaavat janat. Ne jakautuvat kolmeen luokkaan: niihin, jotka leikkaavat molempia janoista AP ja BP, niihin, jotka leikkaavat vain toista niistä, ja niihin, jotka eivät leikkaa kumpaakaan. Olkoon näitä janoja vastaavasti a, b ja c kappaletta. On ilmeistä, että piste P pois lukien janoilta AP ja BP löytyy yhteensä $2a + b$ leikkauspistettä. Riittää siis osoittaa, että b on pariton. Mutta tämä on lähes tulkoon ilmeistä: Valitaan toinen ympyränkaarista AB. Selvästi b on yhtä suuri kuin tältä kaarelta pisteiden A ja B väliltä löytyvien päätepisteiden lukumäärä, joka taas on varmasti pariton sen nojalla, miten sammakot aseteltiin. Näin on tapaus a) käsitelty myös ja olemme valmiit.

Lähteet

Yllä annetut ratkaisut perustuvat tapahtumassa joukkueiden johtajille jaettuihin malliratkaisuihin.