

Moniulotteisuuden ihmeitä: Shapiron syklinen epäyhtälö

Esa V. Vesalainen

Matematik och statistik, Åbo Akademi

Edellisessä Solmun numerossa artikkelissa [7] kerrottiin Nesbittin epäyhtälöstä:

Nesbittin epäyhtälö. Jos a , b ja c ovat positiivisia reaalityyppisiä lukuja, niin

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Tämä on eräs klassisimmista esimerkeistä loistavista matemaattisista ongelmista. Ongelma on tyylikäs, helppo muotoilla ja ymmärtää, ja sen voi ratkaista lukuisilla eri tavoilla, ja kuitenkin mikään aivan yksinkertainen idea ei toimi, vaan jotain hieman epätriviaalia ratkaisun eteen on pakko tehdä ratkaisutavasta riippumatta.

Tässä artikkelissa tarkastelemme Nesbittin epäyhtälön yleistämistä useammille muuttujille. Korkeammissa ulottuvuuksissa tämä johtaa varsin mielenkiintoiseen ja yllättävään havaintoon, ja tarjoaa toisaalta loistavan tekosyn esitellä monia kauniita epäyhtälöihin liittyviä ideoita ja tuloksia.

Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö

Aloitamme ensin alkuperäisestä kolmen muuttujan tapauksesta, jatkaen sitten neljän muuttujan tapaukseen ja siitä ylöspäin. Eräs tehokas tapa käsitellä nämä ensimmäiset tapaukset perustuu Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöön, mikä onkin mainiota, sillä se on muutenkin varsin tärkeä epäyhtälö. Se on myös esiintynyt pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa syksyllä 2014.

Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö. Jos n on positiivinen kokonaisluku, ja jos a_1, a_2, \dots, a_n ja b_1, b_2, \dots, b_n ovat reaalityyppisiä lukuja, niin

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

Todistus. Reaalityyppisten neliöt ovat aina epänegatiivisia. Voimme siten todistaa Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön vaikkapa kirjoittamalla vasemman ja oikean puolen erotuksen neliöiden summana. On hieman

näppärämpää tehdä tämä erotukselle kahdella kerrottuna:

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{\ell=1}^n b_\ell^2 - 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{\ell=1}^n b_\ell^2 + \sum_{\ell=1}^n a_\ell^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k \sum_{\ell=1}^n a_\ell b_\ell \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n (a_k^2 b_\ell^2 + a_\ell^2 b_k^2) - 2 \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_k b_k a_\ell b_\ell \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n (a_k b_\ell - a_\ell b_k)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Nesbittin epäyhtälö

Antakaamme aluksi Nesbittin epäyhtälölle erilainen todistus kuin artikkelissa [7]. Tällä kertaa käytämme Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä.

Nesbittin epäyhtälön todistus. Todistuksen ajatuksena on lisätä epäyhtälön vasemmalle puolelle sopiva ylimääräinen tekijä ja aloittaa käyttämällä Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä niin, että ikävältä tuntuvat nimittäjät häviävät: Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön mukaan

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \\ & \quad \cdot \left(a(b+c) + b(c+a) + c(a+b) \right) \\ & \geq \left(\sqrt{\frac{a}{b+c}} \sqrt{a(b+c)} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} \sqrt{b(c+a)} \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \sqrt{c(a+b)} \right)^2 \\ & = (a+b+c)^2 \\ & = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca. \end{aligned}$$

Koska lisäksi

$$a(b+c) + b(c+a) + c(a+b) = 2ab + 2bc + 2ca,$$

tiedämme nyt siis, että

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca},$$

ja riittää enää todistaa, että

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Mutta tämä viimeinen seuraa suoraan Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöstä, sillä onhan oltava

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{b^2 + c^2 + a^2} \\ &\geq ab + bc + ca. \end{aligned}$$

Neljä muuttujaa

On luonnollista kysyä, voisiko Nesbittin epäyhtälöä yleistää useammille muuttujille jollakin tavalla? Osoittautuu, että tämä on mahdollista. Esimerkiksi, neljälle muuttujalle pätee seuraava epäyhtälö.

Lause. Jos a, b, c ja d ovat positiivisia reaalilukuja, niin pätee

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

Todistus. Aloitamme jälleen käyttämällä Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä, jonka nojalla voimme arvioida

$$\begin{aligned} &\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \right) \\ &\quad \cdot (a(b+c) + b(c+d) + c(d+a) + d(a+b)) \\ &\geq (a+b+c+d)^2. \end{aligned}$$

Koska kahdelle reaaliluvulle x ja y aina pätee

$$(x-y)^2 \geq 0,$$

on oltava

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

Tällä kahden muuttujan aritmeettis-geometrisella epäyhtälöllä voimme arvioida termeittäin, että

$$\begin{aligned} &ab + ac + bc + bd + cd + ca + da + db \\ &\leq ab + \frac{a^2 + c^2}{2} + bc + \frac{b^2 + d^2}{2} + cd + ca + da + db \\ &= \frac{1}{2} (a+b+c+d)^2. \end{aligned}$$

Yhdistämällä tämä aiempaan arvioon ja sieventämällä saadaan haluttu epäyhtälö

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

Viisi muuttujaa

Nyt on luonnollista jatkaa kysymällä, mitä viiden muuttujan tilanteessa käy. Osoittautuu, että se toimii odotetunlaisesti:

Lause. Jos a, b, c, d ja e ovat positiivisia reaalilukuja, niin

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+a} + \frac{e}{a+b} \geq \frac{5}{2}.$$

Todistus. Aloitamme samoin kuin aiemminkin arvioimalla ensin Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöllä

$$\begin{aligned} &\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+a} + \frac{e}{a+b} \\ &\geq \frac{(a+b+c+d+e)^2}{ab+ac+bc+bd+cd+ce+de+da+ea+eb}. \end{aligned}$$

Kertomalla neliö $(a+b+c+d+e)^2$ auki voimme jatkaa

$$= 2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2}{ab + ac + \dots + eb}.$$

Riittää siis todistaa, että

$$\begin{aligned} &2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \\ &\geq ab + ac + bc + bd + cd + ce + de + da + ea + eb. \end{aligned}$$

Mutta tämän voi tehdä helposti vaikkapa Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä käyttäen, koska senhän mukaan

$$\begin{aligned} &2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \\ &= \sqrt{a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + d^2 + d^2 + e^2 + e^2} \\ &\quad \cdot \sqrt{b^2 + c^2 + c^2 + d^2 + d^2 + e^2 + e^2 + a^2 + a^2 + b^2} \\ &\geq ab + ac + bc + bd + cd + ce + de + da + ea + eb. \end{aligned}$$

Kuusi muuttujaa

Mainittakoon vielä, että samanlaisin työkaluin pystyy todistamaan myös kuuden muuttujan version:

Lause. Jos a, b, c, d, e ja f ovat positiivisia reaalilukuja, niin

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b} \geq 3.$$

Jätämme tämän todistamisen lukijan pohdittavaksi.

Shapiron ongelma

Vuonna 1954 Shapiro esitti kysymyksen: päteekö kaikille kokonaisluvuille $n \geq 3$ ja positiivisille reaaliluvuille a_1, a_2, \dots, a_n epäyhtälö

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \geq \frac{n}{2}?$$

Tämä kysymys on tietenkin varsin luonnollinen yllä lueteltujen erikoistapausten valossa.

Lighthill osoitti, että epäyhtälö ei päde 20 muuttujan tapauksessa, mikä avasi uuden kysymyksen siitä, mille kaikille muuttujien lukumäärille n epäyhtälö pätee? Monien monituisten käänteiden ja useiden matemaatikoiden ahkeroinnin jälkeen lopulliseksi vastaukseksi osoittautui, että se pätee parillisille muuttujien lukumäärille $n \leq 12$ ja parittomille $n \leq 23$.

Rankinin ja Drinfeldin tulokset

Tietenkin nyt voi kysyä, kuinka pahasti epäyhtälö oikeastaan epäonnistuu isoilla muuttujien lukumäärillä n ? On varsin kiintoisaa, että Shapiron ongelman kaltainen ilmiö kuitenkin toteutuu kaikilla n . Rankin nimittäin todisti, että jokaisella kokonaisluvulla $n \geq 3$ löytyy vakio γ_n siten, että kaikille positiivisille reaali- luvuille a_1, a_2, \dots, a_n pätee

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \geq \frac{\gamma_n n}{2},$$

ja lisäksi, että peräti $\gamma_n \geq \gamma$, missä $\gamma \approx 0,6094 \dots$

Myöhemmin luvun γ arvoja parannettiin moneen kertaan, ja on luonnollista kysyä, mikä on sen paras mahdollinen arvo. Sokerina pohjalla haluaisimme kertoa Fieldsin mitalisti Drinfeldin varsin nuorena löytämästä tuloksesta, joka kertoo luvun γ parhaan mahdollisen arvon. Nimittäin:

Drinfeldin lause. *Kaikille $n \in \mathbb{Z}_+$ ja positiivisille reaali- luvuille a_1, a_2, \dots, a_n pätee*

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \geq \frac{\gamma n}{2},$$

missä γ on eräs tietty positiivinen reaali- vakio, jolle $\gamma \approx 0,98913 \dots$. Lisäksi tässä lukua γ ei voi korvata millään isommalla reaali- luvulla.

Epäyhtälön oikea puoli on siis vain reilun prosentin pienempi kuin Shapiron ehdottama!

Aiomme lopuksi esittää todistuksen tälle Drinfeldin söpölle epäyhtälölle. Sivuutamme kuitenkin sen osoittamisen, että tämä vakion γ arvo on tosiaan paras mahdollinen. Optimaalisuuden todistus on hieman työläs, mutta ajatus on varsin yksinkertainen: Kun on annettu mielivaltaisen pieni positiivinen reaali- luku ε , valitaan n ensin riittävän isoksi, ja sitten muuttujat a_1, \dots, a_n siten, että epäyhtälön todistuksessa jokainen arvio on hyvin tarkka. Tällä tavalla voi valita luvut a_1, \dots, a_n siten, että epäyhtälön vasemman puolen lausekkeen arvo on pienempi kuin $(\gamma + \varepsilon)n/2$.

Konveksit funktiot

Olkoot a ja b reaali- lukuja, joille $a < b$. Kutsumme reaali- luku- joukkoja

$$]-\infty, b[, \quad]a, b[\quad \text{ja} \quad]a, \infty[$$

avoimiksi väleiksi, joukkoja

$$]-\infty, b], \quad [a, b] \quad \text{ja} \quad [a, \infty[$$

suljetuiksi väleiksi, ja joukkoja

$$[a, b[\quad \text{ja} \quad]a, b]$$

puoliavoimiksi väleiksi.

Määritelmä. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ jokin väli. Sanomme, että funktio $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ on konvekksi, jos kaikilla $\lambda \in [0, 1]$ ja kaikilla $x, y \in I$ pätee

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda) y).$$

Tässä määritelmässä esiintyvä epäyhtälö sanoo, että funktion f kuvaajan pisteet $\langle x, f(x) \rangle$ ja $\langle y, f(y) \rangle$ yhdistävä jana ei käy kuvaajan alapuolella. Käytännössä on usein helppo käyttää seuraavaa kriteeriä.

Lause. *Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ avoin väli, ja olkoon $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivoituva funktio. Tällöin f on konvekksi jos ja vain jos derivaatta f' on kasvava funktio.*

Jos f on kahdesti derivoituva, niin se on konvekksi jos ja vain jos sen toinen derivaatta ei saa negatiivisia arvoja.

Kriteerin jälkimmäinen osa seuraa välittömästi edellisestä, ja edellinen osa on väliarvolauseen sovellus, mutta sivuutamme yksityiskohdat. Tässä on ehkä selvintävää huomata, että derivaatan f' kasvavuus tarkoittaa sitä, että siirrettäessä pistettä $\langle x, f(x) \rangle$ funktion f kuvaajaa pitkin oikealle siihen piirretty kuvaajan tangentti voi kiertää vain vastapäivään, mutta ei koskaan myötäpäivään.

Esimerkkejä. Funktiot

$$x \mapsto x^2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto e^x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

ja

$$x \mapsto \frac{1}{x}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

ovat konvekseja. Tämän voi havaita esimerkiksi siitä, että niiden derivaatat

$$x \mapsto 2x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto e^x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

ja

$$x \mapsto -\frac{1}{x^2}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

ovat kasvavia funktioita.

Sen sijaan funktiot

$$x \mapsto \sin x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

ja

$$x \mapsto x^3 + x^2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

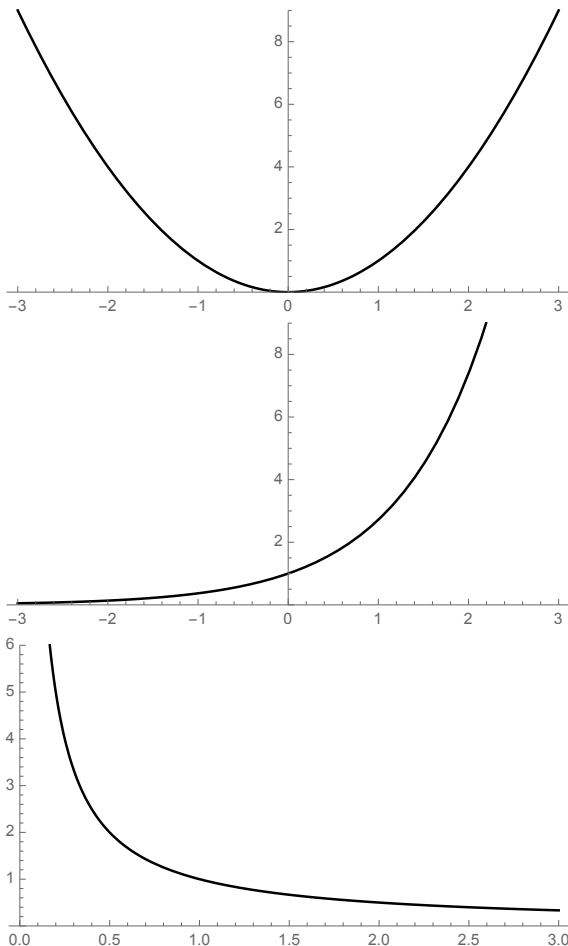
eivät ole konvekseja. Tämän näkee vaikkapa siitä, että

$$\frac{\sin 0 + \sin \pi}{2} = \frac{0 + 0}{2} = 0 < 1 = \sin \frac{\pi}{2} = \sin \frac{0 + \pi}{2},$$

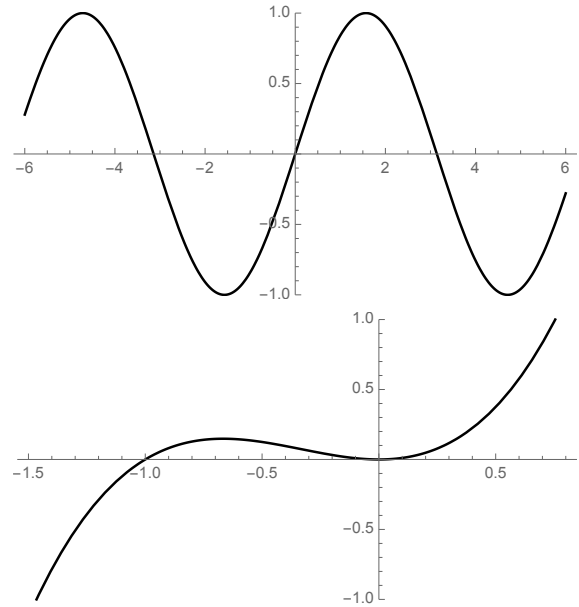
ja

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^3 + (-1)^2 + 0^3 + 0^2}{2} &= 0 < \frac{1}{8} \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \left(\frac{-1+0}{2}\right)^3 + \left(\frac{-1+0}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

jolloin konveksisuuden määritelmä ei päde erikoistapauksessa $\lambda = 1/2$.



Kuva. Lausekkeiden x^2 , e^x ja $1/x$ määrittämien funktioiden kuvaajat. Nämä kolme funktiota ovat konvekseja.



Kuva. Lausekkeiden $\sin x$ ja $x^3 + x^2$ määrittämien funktioiden kuvaajat. Nämä kaksi funktiota eivät ole konvekseja.

Jensenin epäyhtälö

Toinen tärkeistä työkaluista, joita tarvitsemme Drinfeldin epäyhtälön todistamiseen on Jensenin epäyhtälö, jota käytämme todistuksen viimeisessä askeleessa. Se on kuitenkin varsin vahva ja tehokas työkalu, joten sille kannattaa omistaa jonkin verran aikaa.

Jensenin epäyhtälö. Olkoon I väli ja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveksi funktio. Olkoon lisäksi $n \in \mathbb{Z}_+$, olkoot x_1, x_2, \dots, x_n reaalilukuja väliltä I , ja olkoot p_1, p_2, \dots, p_n reaalilukuja väliltä $[0, 1]$ siten, että $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Tällöin

$$\begin{aligned} p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \dots + p_n f(x_n) \\ \geq f(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n). \end{aligned}$$

Erityisesti pätee

$$\frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right).$$

Todistus. Jälkimmäinen epäyhtälö tietenkin seuraa edellisestä valitsemalla yksinkertaisesti $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1/n$, joten riittää todistaa vain edellinen. Todistamme sen induktiolla. Tapaus $n = 1$ on itse asiassa triviaali, sillä silloin epäyhtälön molemmat puolet ovat yhtä suuret. Tapaus $n = 2$ puolestaan on täsmälleen sama kuin konveksisuuden määritelmä.

Oletetaan siis, että olemme todistaneet sen jollakin kokonaisluvulla $n \geq 2$ enintään n muuttujan tapauksessa, ja olkoot x_1, x_2, \dots, x_{n+1} lukuja väliltä I , ja olkoot p_1, p_2, \dots, p_{n+1} lukuja väliltä $[0, 1]$ siten, että $p_1 + p_2 + \dots + p_{n+1} = 1$. Merkitään yksinkertaisuuden vuoksi $P = p_1 + \dots + p_n$, jolloin $p_{n+1} = 1 - P$.

Todistamme Jensenin epäyhtälön $n + 1$ muuttujalle soveltamalla induktio-oletuksen n muuttujan versiota, ja konveksisuuden määritelmän kahden muuttujan versiota:

$$\begin{aligned} & p_1 f(x_1) + \dots + p_n f(x_n) + p_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &= P \cdot \left(\frac{p_1}{P} f(x_1) + \dots + \frac{p_n}{P} f(x_n) \right) + (1 - P) f(x_{n+1}) \\ &\geq P \cdot f\left(\frac{p_1 x_1 + \dots + p_n x_n}{P}\right) + (1 - P) f(x_{n+1}) \\ &\geq f\left(P \cdot \frac{p_1 x_1 + \dots + p_n x_n}{P} + (1 - P) x_{n+1}\right) \\ &= f(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n + p_{n+1} x_{n+1}). \end{aligned}$$

Esimerkkejä Jensenin epäyhtälön käytöstä

Katsokaamme pikaisesti läpi pari yksinkertaista esimerkkiä Jensenin epäyhtälön käytöstä:

Kvadraattis-aritmeettinen epäyhtälö. *Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$ ja olkoot x_1, x_2, \dots, x_n positiivisia reaali-lukuja. Tällöin*

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Todistus. Olemme jo aiemmin todenneet, että funktio

$$x \mapsto x^2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

on konveksi. Siten Jensenin epäyhtälön nojalla

$$\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} \geq \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^2,$$

mistä väite seuraakin ottamalla neliöjuuret puolittain.

Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö. *Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$ ja olkoot x_1, x_2, \dots, x_n positiivisia reaali-lukuja. Tällöin*

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Todistus. Merkitään ensin

$$y_1 = \log x_1, \quad \dots, \quad y_n = \log x_n.$$

Eksponttifunktio $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on konveksi, kuten aiemmin todettiin. Siten Jensenin epäyhtälön nojalla

$$\frac{e^{y_1} + \dots + e^{y_n}}{n} \geq e^{(y_1 + \dots + y_n)/n},$$

eli

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{e^{y_1} \dots e^{y_n}} = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n},$$

kuten pitikin.

Vakion γ arvo

Vakion γ täsmällinen määrittely Drinfeldin epäyhtälössä on hieman hienosyinen. Määrittelemme apufunktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, josta vaadimme, että

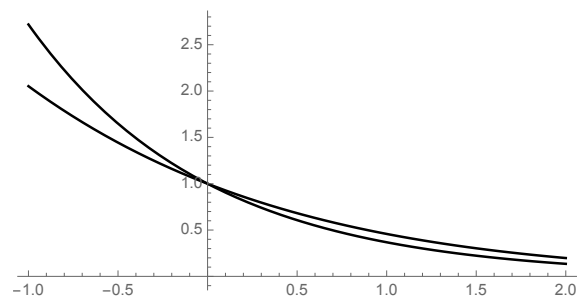
$$g(x) \leq e^{-x} \quad \text{ja} \quad g(x) \leq \frac{2}{e^x + e^{x/2}}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$, ja lisäksi vaadimme, että g on konveksi.

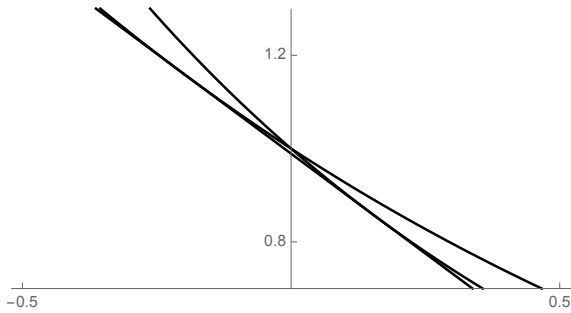
Tällaisella funktiolla on sellainen ominaisuus, että Drinfeldin epäyhtälö pätee vakiolla $\gamma = g(0)$. Ei ole hankala vakuuttua siitä, että paras tapa valita g on ottaa minimi lausekkeiden e^{-x} ja $2/(e^x + e^{x/2})$ määrittämisestä funktioista ja paikata origon ympäristöön ilmestyvä epäkonveksi osa kuvaajien yhteisellä tangentilla.

Tarkemmin, on geometrisesti selvää, että on olemassa yksikäsitteinen suora ℓ , joka sivuaa molempien funktioiden e^{-x} ja $2/(e^x + e^{x/2})$ kuvaajia alhaalta. Tämä suora sivuaa kuvaajaa $y = e^{-x}$ jossakin pisteessä $\langle x_1, y_1 \rangle$, missä $x_1 > 0$, ja kuvaajaa $y = 2/(e^x + e^{x/2})$ jossakin pisteessä $\langle x_2, y_2 \rangle$, missä $x_2 < 0$. Määrittelemme funktion g konkreettisesti asettamalla

$$g(x) = \begin{cases} 2/(e^x + e^{x/2}), & \text{kun } x < x_2, \\ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1, & \text{kun } x_2 \leq x \leq x_1, \text{ ja} \\ e^{-x}, & \text{kun } x > x_1. \end{cases}$$



Kuva. Lausekkeiden e^{-x} ja $2/(e^x + e^{x/2})$ kuvaajat.



Kuva. Lausekkeiden e^{-x} ja $2/(e^x + e^{x/2})$ kuvaajien yhteinen tangentti. Ylempi leikkauspiste sijaitsee pystyakselin pisteessä 1. Yhteinen tangentti leikkaa pystyakselin hieman alemmassa pisteessä γ . Vakion γ arvo epäyhtälössä on lähellä arvoa 1 siksi, että kuvioon syntyvä kolmio on niin litteä.

Suuruusjärjestysepäyhtälö

Toinen tarvittava työkalu Drinfeldin epäyhtälön todistamiseen on suuruusjärjestysepäyhtälö:

Suuruusjärjestysepäyhtälö. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$, ja olkoot a_1, \dots, a_n ja b_1, \dots, b_n reaalityyppisiä lukuja, joille $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ ja $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$. Olkoot lisäksi c_1, c_2, \dots, c_n luvut b_1, b_2, \dots, b_n jossakin järjestyksessä. Tällöin

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \\ \geq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n \\ \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1. \end{aligned}$$

Todistus. Jälkimmäinen epäyhtälö seuraa helposti edellisestä vaihtamalla lukujen a_1, a_2, \dots, a_n merkit, joten riittää todistaa vain edellinen. Todistamme sen induktiolla muuttujien lukumäärän n suhteen. Todistettava epäyhtälö pätee triviaalisti, kun muuttujien lukumäärä n on 1. Oletetaan sitten, että kokonaisluku $n \geq 2$ on sellainen, että epäyhtälö pätee muuttujien lukumäärällä $n-1$, ja olkoot $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ reaalityyppisiä lukuja, kuten suuruusjärjestysepäyhtälön muotoilussa.

Oletetaan ensin, että c_n ei ole suurin luvuista c_1, \dots, c_n , jolloin siis löytyy indeksi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, jolle $c_i \geq c_j$ kaikille $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ja $c_i > c_n$. Tällöin

$$(a_n - a_i)(c_i - c_n) \geq 0,$$

eli

$$a_i c_i + a_n c_n \leq a_i c_n + a_n c_i,$$

eli lausekkeen $a_1 c_1 + \dots + a_n c_n$ arvo ei pienene, kun vaihdamme luvut c_i ja c_n keskenään.

Siten voimme olettaa, että $c_n \geq c_\ell$ kaikille $\ell \in \{1, 2, \dots, n\}$. Mutta tässä tapauksessa todistettavassa epäyhtälössä oikean ja vasemman puolen viimeiset termit ovat yhtä suuret, ja se seuraa suoraan induktiooletuksen $n-1$ muuttujan suuruusjärjestysepäyhtälöstä.

Suuruusjärjestysepäyhtälön sovelluksia

Ennen jatkamista näytämme pari esimerkkiä siitä, miten suuruusjärjestysepäyhtälöä voi käyttää.

Lause. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalityyppisiä lukuja. Tällöin

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a.$$

Todistus. Olkoot luvut a, b ja c missä tahansa suuruusjärjestyksessä. Tällöin luvut a^2, b^2 ja c^2 ovat myös samassa suuruusjärjestyksessä. Esimerkiksi, jos a on isoin luvuista a, b ja c , niin silloin a^2 on isoin luvuista a^2, b^2 ja c^2 . Tai jos esimerkiksi b on toiseksi pienin luvuista a, b ja c , niin silloin b^2 on toiseksi pienin luvuista a^2, b^2, c^2 .

Koska lukujen a, b, c ja lukujen a^2, b^2, c^2 suuruusjärjestykset ovat samat, on siis suuruusjärjestysepäyhtälön mukaan oltava

$$\begin{aligned} a^2 b + b^2 c + c^2 a &\leq a^2 \cdot a + b^2 \cdot b + c^2 \cdot c \\ &= a^3 + b^3 + c^3. \end{aligned}$$

Lause. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalityyppisiä lukuja. Tällöin

$$a + b + c \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}.$$

Todistus. Symmetrian vuoksi voimme olettaa, että $a \leq b \leq c$. Tällöin myös

$$a^3 \leq b^3 \leq c^3 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{bc} \leq \frac{1}{ca} \leq \frac{1}{ab},$$

ja toisaalta myös

$$a^2 \leq b^2 \leq c^2 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{c} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a},$$

jolloin voimme soveltaa suuruusjärjestysepäyhtälöä kahdesti arvioidaksemme

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} &\geq \frac{a^3}{ab} + \frac{b^3}{bc} + \frac{c^3}{ca} = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \\ &\geq \frac{a^2}{a} + \frac{b^2}{b} + \frac{c^2}{c} = a + b + c. \end{aligned}$$

Drinfeldin epäytälön todistus

Todistakaamme lopuksi Drinfeldin epäytälö hänen omaa argumenttiaan [2] seuraten. Eli olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$, ja olkoot a_1, a_2, \dots, a_n positiivisia reaalitykkuja. Määritellään yksinkertaisuuden vuoksi

$$S = \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2}.$$

Tavoittemme on osoittaa, että

$$S \geq \frac{\gamma n}{2} = \frac{g(0)n}{2},$$

missä g on aiemmin määrittelemämme konvekxi funktio.

Aloitamme muuttujanvaihdolla

$$b_1 = \frac{a_2}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_3}{a_2}, \quad \dots, \quad b_{n-1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}, \quad b_n = \frac{a_1}{a_n},$$

jolloin

$$b_1 b_2 \dots b_n = \frac{a_2 a_3 \dots a_n a_1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n} = 1,$$

ja

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2}} + \frac{1}{\frac{a_3}{a_2} + \frac{a_4}{a_3}} + \dots + \frac{1}{\frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2}{a_1}} \\ &= \frac{1}{\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2}} + \frac{1}{\frac{a_3}{a_2} + \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3}} + \dots + \frac{1}{\frac{a_1}{a_n} + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{a_2}{a_1}} \\ &= \frac{1}{b_1(1+b_2)} + \frac{1}{b_2(1+b_3)} + \dots + \frac{1}{b_n(1+b_1)}. \end{aligned}$$

Olkoot seuraavaksi luvut c_1, c_2, \dots, c_n luvut b_1, b_2, \dots, b_n järjestettynä uudelleen niin, että

$$c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n.$$

Tällöin luvut

$$\frac{1}{c_1}, \quad \frac{1}{c_2}, \quad \dots, \quad \frac{1}{c_n},$$

ja luvut

$$\frac{1}{1+c_1}, \quad \frac{1}{1+c_2}, \quad \dots, \quad \frac{1}{1+c_n}$$

ovat samassa suuruusjärjestyksessä, jolloin suuruusjärjestysepäytälön nojalla

$$\begin{aligned} S &\geq \frac{1}{c_1(1+c_n)} + \frac{1}{c_2(1+c_{n-1})} + \dots + \frac{1}{c_n(1+c_1)} \\ &= \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{c_\ell(1+c_{n-\ell+1})}. \end{aligned}$$

Lisäämme lausekkeen symmetriaa hieman kirjoittamalla vielä

$$\begin{aligned} S &\geq \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{c_\ell(1+c_{n-\ell+1})} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{c_\ell(1+c_{n-\ell+1})} + \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{c_\ell(1+c_{n-\ell+1})} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{c_\ell(1+c_{n-\ell+1})} + \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{c_{n-\ell+1}(1+c_\ell)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n \left(\frac{1}{c_\ell(1+c_{n-\ell+1})} + \frac{1}{c_{n-\ell+1}(1+c_\ell)} \right). \end{aligned}$$

Otamme käyttöön jälleen uudet muuttujat asettamalla $d_\ell = c_\ell c_{n-\ell+1}$ jokaiselle $\ell \in \{1, 2, \dots, n\}$, jolloin siis

$$d_1 = c_1 c_n, \quad d_2 = c_2 c_{n-1}, \quad \dots, \quad d_n = c_n c_1.$$

Lisäksi

$$d_1 d_2 \dots d_n = (c_1 c_2 \dots c_n)^2 = (b_1 b_2 \dots b_n)^2 = 1.$$

Lisäksi asetamme

$$e_\ell = \frac{1}{c_\ell(1+c_{n-\ell+1})} + \frac{1}{c_{n-\ell+1}(1+c_\ell)}$$

jokaiselle $\ell \in \{1, 2, \dots, n\}$, jolloin siis

$$S \geq \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n e_\ell.$$

Kiinnitetään seuraavaksi $\ell \in \{1, 2, \dots, n\}$ ja tarkastellaan yhtä termiä e_ℓ . Ensinnäkin,

$$\begin{aligned} e_\ell &= \frac{c_{n-\ell+1} + c_{n-\ell+1} c_\ell + c_\ell + c_\ell c_{n-\ell+1}}{c_\ell c_{n-\ell+1} (1+c_{n-\ell+1}) (1+c_\ell)} \\ &= \frac{(1+c_\ell)(1+c_{n-\ell+1}) + d_\ell - 1}{d_\ell (1+c_\ell)(1+c_{n-\ell+1})} \\ &= \frac{1}{d_\ell} \left(1 + \frac{d_\ell - 1}{(1+c_\ell)(1+c_{n-\ell+1})} \right). \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että jos $d_\ell \geq 1$, niin silloin sulkeiden sisällä toinen termi on selvästi epänegatiivinen, jolloin

$$e_\ell \geq \frac{1}{d_\ell}.$$

Jos taas $d_\ell < 1$ niin silloin sulkeiden sisällä toinen termi on negatiivinen, ja koska Cauchyn-Schwarzin epäytälöllä voimme arvioida

$$\begin{aligned} (1+c_\ell)(1+c_{n-\ell+1}) &\geq (1+\sqrt{c_\ell c_{n-\ell+1}})^2 \\ &= (1+\sqrt{d_\ell})^2, \end{aligned}$$

saamme termille e_ℓ arvion

$$\begin{aligned} e_\ell &\geq \frac{1}{d_\ell} \left(1 + \frac{d_\ell - 1}{(1 + \sqrt{d_\ell})^2} \right) = \frac{1}{d_\ell} \left(1 + \frac{\sqrt{d_\ell} - 1}{\sqrt{d_\ell} + 1} \right) \\ &= \frac{1}{d_\ell} \cdot \frac{2\sqrt{d_\ell}}{\sqrt{d_\ell} + 1} = \frac{2}{d_\ell + \sqrt{d_\ell}}. \end{aligned}$$

Nyt voimme siis arvioida

$$S \geq \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n e_\ell \geq \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq n, \\ d_\ell \geq 1}} \frac{1}{d_\ell} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq n, \\ d_\ell < 1}} \frac{2}{d_\ell + \sqrt{d_\ell}}.$$

Tehkäämme vielä viimeinen muuttujanvaihto asettamalla

$$x_1 = \log d_1, \quad x_2 = \log d_2, \quad \dots, \quad x_n = \log d_n,$$

jolloin

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \log(d_1 d_2 \dots d_n) = \log 1 = 0.$$

Näiden uusien muuttujien avulla voimme kirjoittaa viimeisen arviomme muodossa

$$S \geq \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq n, \\ x_\ell \geq 0}} e^{-x_\ell} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq n, \\ x_\ell < 0}} \frac{2}{e^{x_\ell} + e^{x_\ell/2}}.$$

Koska $e^{-x} \geq g(x)$ ja $2/(e^x + e^{x/2}) \geq g(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, voimme edelleen arvioida

$$S \geq \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n g(x_\ell).$$

Lopuksi, koska g oli konvekssi funktio, voimme Jensenin epäyhtälöllä arvioida

$$S \geq \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n g(x_\ell) \geq \frac{n}{2} g\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) = \frac{n}{2} g(0),$$

ja olemme valmiit.

Ongelmia pohdittavaksi

Ongelma 1. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Ongelma 2. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

Ongelma 3. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Ongelma 4. Olkoot α, β ja γ kolmion kulmat radianeissa. Osoita, että

$$\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}.$$

Ongelma 5. Olkoot α, β ja γ kolmion kulmat. Osoita, että

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ongelma 6. Todista, että jos $p \in [1, \infty[$, jos $n \in \mathbb{Z}_+$, ja jos x_1, x_2, \dots, x_n ovat positiivisia reaalilukuja, niin

$$\sqrt[p]{\frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Ongelma 7. Osoita potenssikeskiarvojen epäyhtälö: Jos r ja s ovat positiivisia reaalilukuja, joille $r \geq s$, jos $n \in \mathbb{Z}_+$, ja jos x_1, x_2, \dots, x_n ovat positiivisia reaalilukuja, niin

$$\sqrt[r]{\frac{x_1^r + x_2^r + \dots + x_n^r}{n}} \geq \sqrt[s]{\frac{x_1^s + x_2^s + \dots + x_n^s}{n}}.$$

Ongelma 8. Olkoot a, b, c, d, e ja f positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b} \geq 3.$$

Lähteet

Alkuperäinen lähde Nesbittin epäyhtälölle on [11] ja Shapiron ongelmalle [12]. Shapiron ongelman varhaisempaa historiaa on lyhyesti esitelty kirjan [10] kappaleessa 2.21 ja myöhempää historiaa erinomaisessa artikkelissa [1]. Drinfeldin todistusta voi ihmetellä vaikkapa hänen alkuperäisen artikkelinsa käännöksestä [2] englanniksi.

Klassisia epäyhtälöitä on käsitelty monien muiden teosten ohella kirjoissa [8, 10, 13], Solmun sivuilla artikkelissa [3, 4, 5, 6], ja Internetissä vaikkapa matemaattikan olympiavalmennuksen materiaalisivuilla [9, 14].

Viitteet

- [1] CLAUSING, A.: *A review of Shapiro's cyclic inequality*, kokoomateoksessa [15], 17–31.
- [2] DRINFEL'D, V. G.: *A cyclic inequality*, Mathematical Notes, 9 (1971), 68–71.
- [3] ERNVALL-HYTÖNEN, A.-M.: *Aritmeettinen ja geometrisen keskiarvo*, Solmu, 1/2016, 27–30.
- [4] HALMETOJA, M.: *Epäyhtälöistä, osa 1*, Solmu, 2/2010, 11–14.
- [5] HALMETOJA, M.: *Epäyhtälöistä, osa 2*, Solmu, 3/2010, 18–22.

- [6] HALMETOJA, M.: *Karamatan epäyhtälö*, Solmu, 3/2013, 24–28.
- [7] LEHTORI K.: *Lumoava yhtälö ja hieno epäyhtälö*, Solmu, 2/2017, 24–25.
- [8] HUNG, P. K.: *Secrets in Inequalities: volume 1 — basic inequalities*, GIL Publishing House, 2007.
- [9] LAPPALAINEN, J., ja A.-M. ERNVALL-HYTÖNEN: *Epäyhtälöoppia matematiikkaolympialaisten tehtäviin*, <http://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/eykirja.pdf>.
- [10] MITRINOVIĆ, D. S.: *Analytic Inequalities*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 165, Springer-Verlag, 1970.
- [11] NESBITT, A. M.: *Problem 15114*, Educational Times, 3 (1903), 37–38.
- [12] SHAPIRO, H. S.: *Problem 403*, American Mathematical Monthly, 61 (1954), 571.
- [13] STEELE, J. M.: *The Cauchy–Schwarz Master Class. An introduction to the art of mathematical inequalities*, MAA Problem Books, Cambridge University Press, 2004.
- [14] VADERLIND, P.: *Epäyhtälöiden kieltämätön viehätys*, <http://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/vaderlind.pdf>.
- [15] WALTER, W. (toim.): *General Inequalities 6. 6th International Conference on General Inequalities, Oberwolfach, Dec. 9–15, 1990*, International Series in Numerical Mathematics, 103, Springer, 1992.