

Moniulotteisuuden ihmeitä: ongelmien ratkaisuita

Esa V. Vesalainen

Matematik och statistik, Åbo Akademi

Edellisen numeron epäyhtälöartikkelissa¹ oli lopussa kahdeksan ongelmaa pohdittavaksi niille lukijoille, jotka sellaista kaipaavat. Tässä on niille esimerkkiratkaisuita.

Ongelma 1. *Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että*

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Ratkaisu. Kahden muuttujan aritmeettis-geometrisen epäyhtälön mukaan

$$\begin{aligned} \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} + \frac{2}{c^2} &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \\ &\geq \frac{2}{ab} + \frac{2}{bc} + \frac{2}{ca} = 2 \cdot \frac{a+b+c}{abc}. \end{aligned}$$

Ongelma 2. *Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että*

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

Ratkaisu. Missä tahansa suuruusjärjestyksessä luvut a, b ja c ikinä ovatkaan, ovat luvut a^2, b^2 ja c^2 ja toisaalta luvut a^3, b^3 ja c^3 aina samassa suuruusjärjestyksessä, ja luvut bc, ca ja ab vastakkaisessa suuruusjärjestyksessä. Nyt voimme käyttää suuruusjärjestysepäyhtälöä kahdesti arvioidaksemme

$$\begin{aligned} a^2bc + b^2ca + c^2ab &\leq a^2 \cdot ab + b^2 \cdot bc + c^2 \cdot ca \\ &= a^3b + b^3c + c^3a \\ &\leq a^3 \cdot a + b^3 \cdot b + c^3 \cdot c \\ &= a^4 + b^4 + c^4. \end{aligned}$$

Ongelma 3. *Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että*

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

¹VESALAINEN, E. V.: *Moniulotteisuuden ihmeitä: Shapiron syklinen epäyhtälö*, Solmu, 1/2018, 26–34.

Ratkaisu. Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön mukaan

$$\begin{aligned} &\left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \right) \cdot 2(a+b+c) \\ &= \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \right) \\ &\quad \cdot \left((b+c) + (c+a) + (a+b) \right) \\ &\geq (a+b+c)^2, \end{aligned}$$

mistä väite seuraa pienellä sievennyksellä.

Ongelma 4. *Olkoot α, β ja γ kolmion kulmat radiaaneissa. Osoita, että*

$$\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}.$$

Ratkaisu. Funktio

$$x \mapsto \tan x : \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$$

on konvekksi, sillä sen derivaatta

$$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x} : \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$$

on kasvava. Siten Jensenin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} \tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} &\geq 3 \tan \frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}{3} \\ &= 3 \tan \frac{\pi}{6} = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ongelma 5. *Olkoot α, β ja γ kolmion kulmat. Osoita, että*

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ratkaisu. Funktio

$$x \mapsto -\sin x :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$$

on konvekksi, sillä sen derivaatta

$$x \mapsto -\cos x :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$$

on kasvava. Siten Jensenin epäyhtälön mukaan

$$\begin{aligned} -\sin \alpha - \sin \beta - \sin \gamma &\geq -3 \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \\ &= -3 \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Ongelma 6. Todista, että jos $p \in [1, \infty[$, jos $n \in \mathbb{Z}_+$, ja jos x_1, x_2, \dots, x_n ovat positiivisia reaalilukuja, niin

$$\sqrt[p]{\frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Ratkaisu. Funktio

$$x \mapsto x^p: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

on konvekksi, sillä sen derivaatta

$$x \mapsto px^{p-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

on kasvava. Siten Jensenin epäyhtälön nojalla

$$\frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{n} \geq \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^p,$$

mistä väite seuraa ottamalla puolittain p . juuret.

Ongelma 7. Osoita potenssikeskiarvojen epäyhtälö: Jos r ja s ovat positiivisia reaalilukuja, joille $r \geq s$, jos $n \in \mathbb{Z}_+$, ja jos x_1, x_2, \dots, x_n ovat positiivisia reaalilukuja, niin

$$\sqrt[r]{\frac{x_1^r + x_2^r + \dots + x_n^r}{n}} \geq \sqrt[s]{\frac{x_1^s + x_2^s + \dots + x_n^s}{n}}.$$

Ratkaisu. Valitaan $p = r/s$, jolloin edellisen ongelman mukaan

$$\begin{aligned} \frac{x_1^s + \dots + x_n^s}{n} &\leq \sqrt[p]{\frac{x_1^{ps} + \dots + x_n^{ps}}{n}} \\ &= \left(\sqrt[r]{\frac{x_1^r + \dots + x_n^r}{n}} \right)^s, \end{aligned}$$

mistä väite seuraakin ottamalla puolittain s . juuret.

Ongelma 8. Olkoot a, b, c, d, e ja f positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b} \geq 3.$$

Ratkaisu. Aloitamme soveltamalla Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä niin, että ikävältä tuntuvat nimittäjät supistuvat pois:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b} \right) \\ &\quad \cdot \left(a(b+c) + b(c+d) + c(d+e) \right. \\ &\quad \left. + d(e+f) + e(f+a) + f(a+b) \right) \\ &\geq (a+b+c+d+e+f)^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + 2ad + 2be + 2cf \\ &\quad + 2ab + 2ac + 2ae + 2af + 2bc + 2bd + 2bf \\ &\quad + 2cd + 2ce + 2de + 2df + 2ef. \end{aligned}$$

Täten

$$\begin{aligned} &\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b} \\ &\geq 2 + \frac{(a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2}{a(b+c) + b(c+d) + \dots + f(a+b)}. \end{aligned}$$

Riittää siten osoittaa, että

$$\begin{aligned} &(a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2 \\ &\geq a(b+c) + b(c+d) + \dots + f(a+b). \end{aligned}$$

Mutta soveltamalla Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä näemme, että

$$\begin{aligned} &(a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2 \\ &= \sqrt{(a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2} \\ &\quad \cdot \sqrt{(b+e)^2 + (c+f)^2 + (a+d)^2} \\ &\geq (a+d)(b+e) + (b+e)(c+f) + (c+f)(a+d) \\ &= ab + ae + db + de + bc + bf \\ &\quad + ec + ef + ca + cd + fa + fd \\ &= a(b+c) + b(c+d) + c(d+e) \\ &\quad + d(e+f) + e(f+a) + f(a+b), \end{aligned}$$

ja olemme valmiit.