

Muirheadin epäyhtälö: ongelmien ratkaisuita

Esa V. Vesalainen

Matematik och statistik, Åbo Akademi

Artikkelissa *Muirheadin epäyhtälö* Solmun numerossa 3/2019 oli seitsemän ongelmaa lukijoiden iloksi. Tässä olisi ratkaisu jokaiselle niistä.

Ongelma 1. *Olkoot a, b ja c epänegatiivisia reaalilukuja. Osoita, että*

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc.$$

Ratkaisu. Kertomalla todistettavan epäyhtälön vasen puoli auki se muuttuu muotoon

$$a^2 b + a^2 c + a b^2 + b^2 c + a c^2 + b c^2 + 2abc \geq 8abc,$$

eli riittää todistaa, että

$$a^2 b + a^2 c + a b^2 + b^2 c + a c^2 + b c^2 \geq 6abc.$$

Todetaan tätä varten, että $\langle 2, 1, 0 \rangle \succ \langle 1, 1, 1 \rangle$. Onhan nimittäin

$$2 \geq 1 \geq 0, \quad 1 \geq 1 \geq 1, \quad 2 + 1 + 0 = 3 = 1 + 1 + 1,$$

sekä vielä

$$2 \geq 1 \quad \text{ja} \quad 2 + 1 = 3 \geq 2 = 1 + 1.$$

Siten Muirheadin epäyhtälön nojalla

$$\sum_{\text{sym}} a^2 b \geq \sum_{\text{sym}} abc,$$

mikä onkin juuri tarvittava epäyhtälö. \square

Ongelma 2. *Olkoot a, b ja c epänegatiivisia reaalilukuja. Osoita, että*

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3abc(a + b + c).$$

Ratkaisu. Todetkaamme ensin, että

$$\langle 4, 0, 0 \rangle \succ \langle 2, 1, 1 \rangle \quad \text{ja} \quad \langle 2, 2, 0 \rangle \succ \langle 2, 1, 1 \rangle.$$

Onhan nimittäin

$$4 \geq 0 \geq 0, \quad 2 \geq 1 \geq 1, \quad 2 \geq 2 \geq 0, \quad \text{ja} \quad 2 \geq 1 \geq 1,$$

ja

$$4 + 0 + 0 = 4 = 2 + 1 + 1$$

ja

$$2 + 2 + 0 = 4 = 2 + 1 + 1,$$

sekä

$$4 \geq 2, \quad 4 + 0 = 4 \geq 3 = 2 + 1, \quad 2 \geq 2,$$

ja

$$2 + 2 = 4 \geq 3 = 2 + 1.$$

Siispä Muirheadin epäyhtälön nojalla

$$\sum_{\text{sym}} a^4 \geq \sum_{\text{sym}} a^2 bc, \quad \text{ja} \quad \sum_{\text{sym}} a^2 b^2 \geq \sum_{\text{sym}} a^2 bc,$$

Edellinen epäyhtälö sanoo, että

$$2(a^4 + b^4 + c^4) \geq 2(a^2 bc + a b^2 c + ab c^2),$$

tai sievemmin

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2 bc + a b^2 c + ab c^2,$$

ja jälkimmäinen sanoo, että

$$2(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) \geq 2(a^2 bc + a b^2 c + ab c^2).$$

Laskemalla nämä kaksi viimeistä epäyhtälöä yhteen saamme

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) \geq 3(a^2 bc + a b^2 c + ab c^2),$$

eli

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3abc(a + b + c),$$

kuten pitikin. \square

Ongelma 3. *Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja, joille $abc = 1$. Todista, että*

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Ratkaisu. Riittää osoittaa, että kaikille positiivisille reaaliluvuille a, b ja c pätee

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^{7/3} b^{1/3} c^{1/3} + a^{1/3} b^{7/3} c^{1/3} + a^{1/3} b^{1/3} c^{7/3}.$$

Voimmekin helposti tarkistaa, että

$$\langle 3, 0, 0 \rangle \succ \langle 7/3, 1/3, 1/3 \rangle,$$

sillä onhan

$$3 \geq 0 \geq 0, \quad \frac{7}{3} \geq \frac{1}{3} \geq \frac{1}{3}, \quad 3 + 0 + 0 = 3 = \frac{7}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3},$$

sekä vielä

$$3 = \frac{9}{3} \geq \frac{7}{3}, \quad \text{ja} \quad 3 + 0 = 3 = \frac{9}{3} \geq \frac{8}{3} = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}.$$

Siispä Muirheadin epäyhtälön nojalla

$$\sum_{\text{sym}} a^3 \geq \sum_{\text{sym}} a^{7/3} b^{1/3} c^{1/3},$$

eli

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq 2(a^{7/3} b^{1/3} c^{1/3} + a^{1/3} b^{7/3} c^{1/3} + a^{1/3} b^{1/3} c^{7/3}),$$

mistä väite seuraakin suoraan jakamalla puolittain kahdella. \square

Ongelma 4. Olkoon n positiivinen kokonaisluku, jolle $n \geq 2$, ja olkoot a_1, a_2, \dots, a_n epänegatiivisia reaali-lukuja. Osoita, että

$$\frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sqrt{a_i a_j} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Ratkaisu. Aloitetaan toteamalla, että n reaalityön jonoille $\langle 1/2, 1/2, 0, \dots, 0 \rangle$ ja $\langle 1/n, 1/n, \dots, 1/n \rangle$ pätee

$$\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots, 0 \right\rangle \succ \left\langle \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right\rangle.$$

Tämä seuraa havainnoista

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \geq 0 \geq 0 \geq \dots \geq 0, \quad \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n} \geq \dots \geq \frac{1}{n},$$

ja

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 + 0 + \dots + 0 = 1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n},$$

sekä

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\geq \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} &= 1 \geq \frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 &= 1 \geq \frac{3}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}, \\ &\vdots \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_{(n-2) \times 0} &= 1 \geq \frac{n}{n} = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n \times \frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Nyt Muirheadin epäyhtälön nojalla pätee

$$\sum_{\text{sym}} a_1^{1/2} a_2^{1/2} \geq \sum_{\text{sym}} a_1^{1/n} a_2^{1/n} \cdots a_n^{1/n},$$

eli

$$2! \cdot (n-2)! \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sqrt{a_i a_j} \geq n! \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

mistä väite heti seuraakin jakamalla puolittain kertomalla $n!$. \square

Ongelma 5. Olkoot a, b ja c positiivisia reaali-lukuja. Todista Nesbittin epäyhtälö

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Ratkaisu. Kertomalla epäyhtälö puolittain nimittäjien tulolla $2(a+b)(b+c)(c+a)$ se muuttuu muotoon

$$\begin{aligned} 2a(c+a)(a+b) + 2b(b+c)(a+b) \\ + 2c(b+c)(c+a) \\ \geq 3(a+b)(b+c)(c+a). \end{aligned}$$

Kertomalla kaikki tulot auki jäljelle jää

$$\begin{aligned} 2(a^3 + b^3 + c^3) + 6abc \\ + 2(a^2 b + a^2 c + a b^2 + b^2 c + a c^2 + b c^2) \\ \geq 3(a^2 b + a^2 c + a b^2 + b^2 c + a c^2 + b c^2) + 6abc, \end{aligned}$$

mikä sievenee muotoon

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^2 b + a^2 c + a b^2 + b^2 c + a c^2 + b c^2.$$

Tämä onkin

$$\sum_{\text{sym}} a^3 \geq \sum_{\text{sym}} a^2 b,$$

mikä seuraa suoraan Muirheadin epäyhtälöstä, jos vain sattuu olemaan niin, että $\langle 3, 0, 0 \rangle \succ \langle 2, 1, 0 \rangle$. Mutta tämä pätee, koska on

$$3 \geq 0 \geq 0, \quad 2 \geq 1 \geq 0, \quad 3 + 0 + 0 = 3 = 2 + 1 + 0,$$

sekä vielä $3 \geq 2$ ja $3 + 0 = 3 \geq 3 = 2 + 1$. \square

Ongelma 6. Olkoot a, b ja c positiivisia reaali-lukuja. Todista, että

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \geq 2 \left(1 + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

Ratkaisu. Kertomalla todistettava epäyhtälö puolittain tulolla $a^2 b^2 c^2$ se muuttuu muotoon

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \\ \geq 2a^2 b^2 c^2 + 2a^{5/3} b^{5/3} c^{5/3} (a+b+c), \end{aligned}$$

minkä, kertomalla kaiken auki ja supistamalla puolittain termit $2a^2 b^2 c^2$, voimme kirjoittaa yksinkertaisemmassa muodossa

$$\sum_{\text{sym}} a^4 b^2 \geq \sum_{\text{sym}} a^{8/3} b^{5/3} c^{5/3}.$$

Tämä seuraa suoraan Muirheadin epäyhtälöstä, jos vain pätee $\langle 4, 2, 0 \rangle \succ \langle 8/3, 5/3, 5/3 \rangle$. Mutta näin on, sillä

$$4 \geq 2 \geq 0, \quad \frac{8}{3} \geq \frac{5}{3} \geq \frac{5}{3},$$

ja

$$4 + 2 + 0 = 6 = \frac{18}{3} = \frac{8}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{3},$$

ja vielä

$$4 = \frac{12}{3} \geq \frac{8}{3}, \quad \text{sekä} \quad 4 + 2 = 6 = \frac{18}{3} \geq \frac{13}{3} = \frac{8}{3} + \frac{5}{3}. \quad \square$$

Ongelma 7. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalityyppisiä lukuja. Todista, että

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

Ratkaisu. Kertomalla puolittain tulolla

$$abc(a^3 + b^3 + abc)(b^3 + c^3 + abc)(c^3 + a^3 + abc),$$

todistettava epäyhtälö saa muodon

$$\begin{aligned} & (a^3 + b^3 + abc)(b^3 + c^3 + abc)abc \\ & + (b^3 + c^3 + abc)(c^3 + a^3 + abc)abc \\ & + (c^3 + a^3 + abc)(a^3 + b^3 + abc)abc \\ & \leq (a^3 + b^3 + abc)(b^3 + c^3 + abc)(c^3 + a^3 + abc). \end{aligned}$$

Kertomalla rohkeasti kaiken auki ja ryhmittelemällä termejä sopivasti se muuttuu muotoon

$$\begin{aligned} & (a^6 + b^6 + c^6)abc + 3(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3)abc \\ & + 4(a^3 + b^3 + c^3)a^2b^2c^2 + 3a^3b^3c^3 \\ & \leq (a^6b^3 + a^6c^3 + a^3b^6 + b^6c^3 + a^3c^6 + b^3c^6) \\ & + 2a^3b^3c^3 + (a^6 + b^6 + c^6)abc \\ & + 3(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3)abc \\ & + 2(a^3 + b^3 + c^3)a^2b^2c^2 + a^3b^3c^3, \end{aligned}$$

mikä sievenee välittömästi muotoon

$$\begin{aligned} & 2(a^3 + b^3 + c^3)a^2b^2c^2 \\ & \leq a^6b^3 + a^6c^3 + a^3b^6 + b^6c^3 + a^3c^6 + b^3c^6, \end{aligned}$$

tai vielä yksinkertaisemmin muotoon

$$\sum_{\text{sym}} a^5 b^2 c^2 \leq \sum_{\text{sym}} a^6 b^3.$$

Tämä puolestaan seuraa välittömästi Muirheadin epäyhtälöstä, jos vain pätee $\langle 6, 3, 0 \rangle \succ \langle 5, 2, 2 \rangle$. Mutta tämä pätee sillä on

$$6 \geq 3 \geq 0, \quad 5 \geq 2 \geq 2, \quad \text{ja} \quad 6 + 3 + 0 = 9 = 5 + 2 + 2,$$

sekä vielä

$$6 \geq 5, \quad \text{ja} \quad 6 + 3 = 9 \geq 7 = 5 + 2. \quad \square$$

Lähteet

Ongelmat 1, 2 ja 4 ovat tehtävät 12.2(a), 12.3 ja 12.2(c) kirjassa [3]. Ongelmat 2 ja 5 ovat esimerkit 6.12 ja 6.13 teoksessa [1], ja ongelma 6 on saman teoksen tehtävä 6d.4. Lopuksi, ongelma 7 on harjoitustehtävä 12.9 kirjassa [2].

Viitteet

- [1] BRADLEY, C. J.: *Introduction to Inequalities*, Handbooks, Number Two, United Kingdom Mathematics Trust, 2010.
- [2] CVETKOVSKI, Z.: *Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems*, Springer, 2012.
- [3] STEELE, J. M.: *The Cauchy–Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*, Mathematical Association of America Problem Books Series, Cambridge University Press, 2004.