Miksi kahden negatiivisen luvun tulo on positiivinen?

Esa V. Vesalainen
Matematik och statistik, Åbo Akademi

Eräs lukiolainen esitti kirjoittajalle kerran erään varsin luonnollisen kysymyksen: Miksi kahden negatiivisen luvun tulo on positiivinen? Voisihan esimerkiksi ajatella, että niiden tulon olisi syytä olla vieläkin negatiivisempi!

Tämä kysymys on erinomainen, ja seuraavassa tavoitteemme on antaa tälle ymmärrettävä vastaus, joka samalla myös on matematiikassa usein toistuva teema.

Mikä on oikeasti tärkeää?

Laskutoimitukset eivät ole taivaalta pudonneita. Pikemminkin ne ovat sopimuskysymyksiä. Esimerkiksi, kun on olemassa jono otuksia, joiden nimiksi on syystä tai toisesta annettu 1, 2, 3, ..., niin ei ole mitään pakottavaa syytä sopia, että $2+3$ tarkoittaa samaa kuin 5 ja että $3\cdot 7$ tarkoittaa samaa kuin 21. Kuitenkin näille luvuille on olemassa joitakin luonnollisia laskutoimituksia, jotka myös ovat sangen hyödyllisiä, ja niinpä ne on erityisesti nimetty summaksi ja tuloksi.

Tunnetusti aiemmin mainittua jonoa 1, 2, 3, ... on kätevää laajentaa lisäotuksilla myös vasemmalle päin niin, että saadaan jono

$$\ldots,\quad -3,\quad -2,\quad -1,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots$$

Nyt, jos positiivistenkin lukujen laskutoimitukset olivat vain sopimuskysymyksiä, niin miten paljon mielivaltaisempaa laskutoimitusten määrittelystä tuleekaan, jos mukana on myös negatiivisia lukuja?! Mutta osoittautuu, että nyt on erinomaisia syitä laajentaa aiemmat laskutoimitukset yksikäsitteisellä tavalla.

Tämä on oikeastaan asian ydin: laskutoimitukset luovat lukujen joukkoon *rakennetta*, jolla on hyviä ominaisuuksia. Jos a, b, c ja d ovat positiivisia kokonaislukuja, niin esimerkkejä tällaisista hyvistä ominaisuuksista ovat

$$\begin{gathered} a+b=b+a,\\ a\cdot b=b\cdot a,\\ (a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d,\\ a+b=a+c\Longrightarrow b=c,\\ \vdots \end{gathered}$$

Tällaiset ominaisuudet ovat sangen hyödyllisiä, kuten kaikki matematiikan parissa enemmän puuhastelleet tietävät. Olisi siis toivottavaa, että nämä ominaisuudet säilyisivät kun negatiiviset luvut otetaan kuvioon mukaan. Tietenkään ei ole mitään syytä, miksi laskutoimituksia pitäisi voida tällaisella tavalla laajentaa, mutta ainahan sopii yrittää.

Osoittautuu, että on olemassa täsmälleen yksi laajennos, joka säilyttää yllä luetellut kivat ominaisuudet!

Tulon laajentamisesta

Oletamme nyt, että yhteen- ja vähennyslaskut on määritelty tutulla tavalla kaikille kokonaisluvuille, ja että kertolasku on määritelty tutulla tavalla positiivisille kokonaisluvuille. Lisäksi oletamme, että olemme jotenkin määritelleet kertolaskun myös nollalle ja jopa negatiivisille luvuille sellaisella tavalla, että aiemmin luetellut hyvät ominaisuudet pätevät. Tavoitteemme on tutkia, missä määrin nämä ehdot rajaavat tätä kertolaskun laajennosta.

Nollalla kertominen. Olkoon x kokonaisluku, mahdollisesti myös negatiivinen tai nolla. Tällöin on oltava

$$0\cdot x+0=0\cdot x=(0+0)\cdot x=0\cdot x+0\cdot x,$$

ja siten ainoa järkevä mahdollisuus on, että $0\cdot x=0$.

Luvun ja vastaluvun tulo. Olkoot x ja y kokonaislukuja. Nyt

$$x\cdot y+(-x)\cdot y=(x+(-x))\cdot y=0\cdot y=0,$$

ja

$$x\cdot y+x\cdot(-y)=x\cdot(y+(-y))=x\cdot 0=0.$$

Täten on siis oltava

$$(-x)\cdot y=x\cdot(-y)=-(x\cdot y).$$

Kahden vastaluvun tulo. Olkoot edelleen x ja y kokonaislukuja. Käyttämällä juuri johdettuja kaavoja saadaan

$$(-x)\cdot(-y)=-\left((-x)\cdot y\right)=-\left(-\left(x\cdot y\right)\right)=x\cdot y.$$

Erityisesti, jos x ja y ovat positiivisia, niin negatiivisten lukujen $-x$ ja $-y$ tulo $(-x)\cdot(-y)$ on välttämättä $x\cdot y$, ja siten positiivinen.