Kahden muuttujan keskiarvoista

Esa V. Vesalainen
Matematik och statistik, Åbo Akademi

Olkoot a ja b positiivisia reaalilukuja. Niiden kvadraattinen keskiarvo Q, (aritmeettinen) keskiarvo A, geometrinen keskiarvo G ja harmoninen keskiarvo H saadaan kaavoista

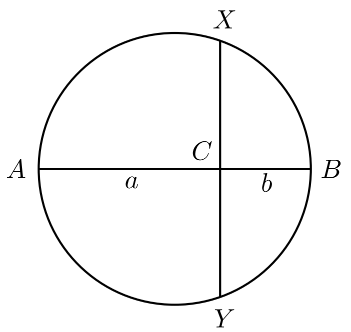
$$Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \quad A = \frac{a+b}{2},$$
$$G = \sqrt{ab}, \quad \text{ja} \quad H = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Näille tunnetusti pätevät hyvin klassiset ja tyylikkäät epäyhtälöt $Q \geqslant A \geqslant G \geqslant H$. Lisäksi tunnetusti pätee, että jos jotkin kaksi keskiarvoista Q, A, G ja H ovat yhtä suuria, niin silloin itse asiassa on $a = b$ ja $Q = A = G = H$.

Kuitenkin nämä keskiarvot voivat äkkiseltään tuntua hieman abstrakteilta tai kummallisilta. Tässä pienessä kirjoituksessa tarkoituksenamme on kertoa muutamista geometrisista tilanteista, joissa näitä keskiarvoja luonnollisilla tavoilla esiintyy, mikä toivottavasti saa ne ja yllä kuvatut epäyhtälöt näyttämään ystävällisemmiltä.

Ympyrä, jonka halkaisijan pituus on $a+b$

Tarkastellaan ensin ympyrää, jonka halkaisijan AB pituus on $a+b$, ja piirretään halkaisijalle AB kohtisuora, joka pilkkoo sen näihin osiin:



Tässä siis pisteet X ja Y sijaitsevat ympyrän kehällä niin, että $XY \perp AB$, ja janojen AB ja XY leikkauspiste on C. Lisäksi $AC = a$ ja $CB = b$.

Lause. *Yllä kuvatussa tilanteessa pätee*

$$XC = CY = \sqrt{ab}.$$

Todistus. Kehäkulmalauseen nojalla on luonnollisesti oltava $\angle CAX = \angle BYC$, ja tietenkin on myös $\angle XCA = \angle YCB = 90°$, joten kolmiot $\triangle ACX$ ja $\triangle YCB$ ovat yhdenmuotoisia. Siten vastaavien sivuparien suhteet ovat yhtä suuria, ja erityisesti

$$\frac{AC}{CY} = \frac{XC}{CB} \quad \text{eli} \quad AC \cdot CB = XC \cdot CY.$$

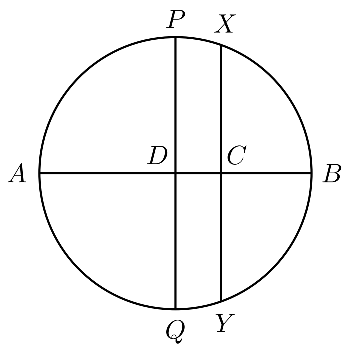
Lisäksi, koska kuvio on itse asiassa peilisymmetrinen halkaisijan AB suhteen, on $XC = CY$, eli

$$XC^2 = CY^2 = AC \cdot CB = ab,$$

ja siis $XC = CY = \sqrt{ab}$. □

Tämä tarjoaa myös näppärän tavan laskea kahden janan geometrisen keskiarvon vaikkapa harpilla ja viivaimella. Soveltamalla konstruktiota janoihin, joiden pituudet ovat a ja $b = 1$, voimme käyttää samaa konstruktiota myös neliöjuuren $\sqrt{a}$ laskemiseen.

Kuviosta löytyy myös lukujen a ja b aritmeettinen keskiarvo. Nimittäin, piirretään ympyrälle toinen halkaisija PQ, jolle $PQ \perp AB$. Olkoon janojen PQ ja AB leikkauspiste D. Tietenkin $PD = DQ = (a+b)/2$.



Nyt on visuaalisesti varsin selvää, että on oltava $PD \geqslant XC$, eli aritmeettinen keskiarvo on aina vähintään geometrinen keskiarvo, ja lisäksi yhtäsuuruus vallitsee vain ja ainoastaan silloin, kun $P = X$ ja $D = C$, eli kun $AC = CB$, eli kun $a = b$.

Nopeuksien keskiarvoja

Aritmeettinen ja harmoninen keskiarvo esiintyvät luonnollisesti tarkasteltaessa nopeuksien keskiarvoja. Seuraavaksi ihmettelemme kahta esimerkkiä tästä. Seuraava on klassinen kilpailutehtävä:

Ongelma. *Arthurin pitää päästä Davidin luo autolla. Mikäli Arthur ajaa* $60\,\mathrm{km/h}$*, saapuu hän* 5 *minuuttia myöhässä. Mikäli hän ajaa* $90\,\mathrm{km/h}$*, saapuu hän* 5 *minuuttia etuajassa. Mitä nopeutta hänen on ajettava ollakseen täsmälleen oikeaan aikaan perillä?*

Ratkaisu. Olkoon ℓ se matka, joka Arthurin on ajettava, olkoon t se aika, jossa Arthurin on oltava perillä, ja olkoon v kysytty nopeus. On selvitettävä $v = \ell/t$, kun tiedetään, että

$$60\,\mathrm{km/h} = \frac{\ell}{t + 5\,\mathrm{min}}, \quad \text{ja} \quad 90\,\mathrm{km/h} = \frac{\ell}{t - 5\,\mathrm{min}}.$$

Kirjoittamalla nämä yhtälöt muodossa

$$t + 5\,\mathrm{min} = \ell \cdot \frac{1}{60\,\mathrm{km/h}}, \quad \text{ja} \quad t - 5\,\mathrm{min} = \ell \cdot \frac{1}{90\,\mathrm{km/h}},$$

ja laskemalla nämä yhteen, saadaan

$$2t = \ell \cdot \left(\frac{1}{60\,\mathrm{km/h}} + \frac{1}{90\,\mathrm{km/h}} \right),$$

ja edelleen, että

$$v = \frac{\ell}{t} = \frac{2}{\dfrac{1}{60\,\mathrm{km/h}} + \dfrac{1}{90\,\mathrm{km/h}}} = \frac{2}{\dfrac{3}{180} + \dfrac{2}{180}}\,\mathrm{km/h}$$
$$= \frac{360}{5}\,\mathrm{km/h} = 72\,\mathrm{km/h}. \qquad \square$$

Toinen esimerkkimme nopeuksien keskiarvoista olisi tällainen[1]:

Ongelma. *Aarne ja Bertta pyöräilevät Ankkavaarasta Hanhilinnaan. Aarne pyöräilee puolet* ***etäisyydestä*** *nopeudella* v_1 *ja toiset puolet nopeudella* $v_2 \neq v_1$*. Bertta taas pyöräilee puolet* ***matka-ajastaan*** *nopeudella* v_1 *ja toiset puolet nopeudella* v_2*. Kumpi heistä saapuu perille nopeammin?*

Ratkaisu. Olkoon matkaetäisyys d, ja olkoon Aarnen matka-aika t_A ja Bertan t_B. Aarne kulkee puolet etäisyydestä ajassa $d/(2v_1)$ ja toiset puolet ajassa $d/(2v_2)$. Siten

$$t_A = \frac{d}{2} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right).$$

Bertta taas kulkee puolessa ajastaan etäisyyden $t_B v_1/2$ ja toisella puolella etäisyyden $t_B v_2/2$, jolloin

$$d = \frac{t_B}{2} (v_1 + v_2), \quad \text{eli} \quad t_B = \frac{2d}{v_1 + v_2}.$$

Nyt aritmeettis-harmonisen epäyhtälön nojalla

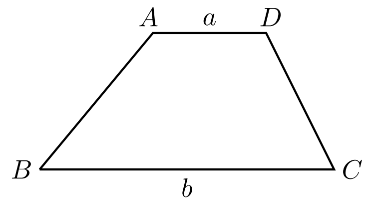
$$t_A = d \cdot \frac{\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_2}}{2} > d \cdot \frac{2}{v_1 + v_2} = t_B,$$

eli Bertta saapuu perille nopeammin. $\square$

[1] Tämä on poimittu C. J. Bradleyn teoksesta *Introduction to Inequalities* (Handbooks, Number Two, United Kingdom Mathematics Trust, 2010).

Puolisuunnikas, jonka kannat ovat a ja b

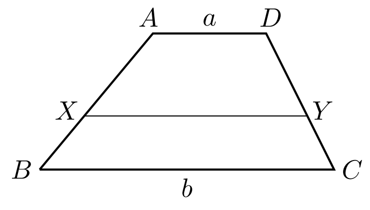
Tarkastellaan puolisuunnikasta $ABCD$, jonka kantojen pituudet ovat $AD = a$ ja $BC = b$.



Osoittautuu, että tästä kuviosta löytyvät kaikki neljä keskiarvoa Q, A, G ja H, vieläpä geometrisesti luonnollisilla tavoilla![2]

Lause. *Sijaitkoon piste* X *sivulla* AB *ja piste* Y *sivulla* CD *niin, että* $AD \parallel XY \parallel BC$*, ja että puolisuunnikkaiden* $AXYD$ *ja* $XBCY$ *alat ovat yhtä suuret. Tällöin*

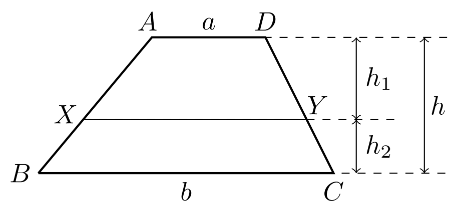
$$XY = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$



Todistus. Olkoon alkuperäisen puolisuunnikkaan korkeus h, jolloin sen pinta-ala on tunnetusti

$$A = \frac{a + b}{2} \cdot h.$$

Olkoon puolisuunnikkaan $AXYD$ ala A_1 ja korkeus h_1, ja olkoon puolisuunnikkaan $XBCY$ ala A_2 ja korkeus h_2, jolloin luonnollisesti $h_1 + h_2 = h$:



Janan XY määritelmän nojalla on siis $A_1 = A_2 = A/2$, eli

$$\frac{a + XY}{2} \cdot h_1 = \frac{XY + b}{2} \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a + b}{2} \cdot h.$$

Tästä voimme ratkaista korkeudeksi h_2

$$h_2 = \frac{(a + b)\,h}{2\,(XY + b)}.$$

[2] Kirjoittaja löysi tämän yllättävän seikan E. Beckenbachin ja R. Bellmanin teoksesta *An Introduction to Inequalities* (New Mathematical Library, 3, Random House, 1961).

Koska $h_1 = h - h_2$, voimme myös laskea

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2} \cdot h &= (a + XY)\, h_1 = (a + XY)\,(h - h_2) \\ &= (a + XY) \left(h - \frac{(a+b)\, h}{2\,(XY + b)} \right) \\ &= (a + XY) \cdot \frac{2\,XY + 2b - (a+b)}{2\,(XY + b)} \cdot h,\end{aligned}$$

mistä sieventämällä edelleen

$$(a+b)\,(XY+b) = (a+XY)\,(2 \cdot XY + b - a)\,.$$

Kertomalla kaiken auki saamme

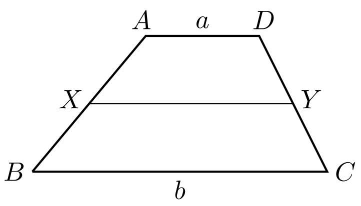
$$\begin{aligned}&a \cdot XY + ab + b \cdot XY + b^2 \\ &= 2a \cdot XY + ab - a^2 + 2 \cdot XY^2 + b \cdot XY - a \cdot XY,\end{aligned}$$

josta supistuu mukavasti termejä pois niin, että

$$a^2 + b^2 = 2 \cdot XY^2, \quad \text{eli} \quad XY = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. \qquad \square$$

Lause. *Olkoon X sivun AB keskipiste, ja olkoon Y sivun CD keskipiste. Tällöin $AD \parallel XY \parallel BC$ ja*

$$XY = \frac{a+b}{2}.$$



Todistus. Olkoon puolisuunnikkaan $ABCD$ korkeus h. Koska oli $AD \parallel BC$, on kumpikin pisteistä X ja Y yhtä etäällä suorasta AD kuin suorasta BC. Siispä $AD \parallel XY \parallel BC$, ja lisäksi puolisuunnikkaiden $AXYD$ ja $XBCY$ korkeudet ovat yhtä suuria, nimittäin yhtä suuria kuin $h/2$. Mutta koska näiden kahden puolisuunnikkaan alojen summan on oltava puolisuunnikkaan $ABCD$ ala, voimme todeta, että

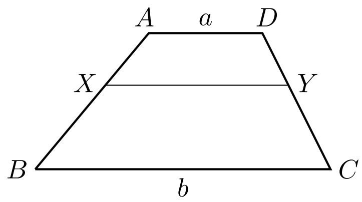
$$\frac{a+XY}{2} \cdot \frac{h}{2} + \frac{XY+b}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

mistä saa sieventämällä

$$XY = \frac{a+b}{2}. \qquad \square$$

Lause. *Sijaitkoot piste X sivulla AB ja piste Y sivulla CD niin, että $AD \parallel XY \parallel BC$, ja että nelikulmiot $AXYD$ ja $XBCY$ ovat yhdenmuotoiset. Tällöin*

$$XY = \sqrt{ab}.$$



Todistus. Koska $AXYD$ ja $XBCY$ ovat yhdenmuotoiset, saamme vertailemalla vastaavia sivuja AD ja XY, ja toisaalta vastaavia sivuja XY ja BC, että

$$\frac{AD}{XY} = \frac{XY}{BC}, \quad \text{eli} \quad XY^2 = AD \cdot BC = ab,$$

eli $XY = \sqrt{ab}$, kuten pitikin. $\square$

Lause. *Sivulta AB voi valita pisteen X, ja sivulta CD pisteen Y niin, että $AD \parallel XY \parallel BC$, ja että puolisuunnikkaat $AXYD$ ja $XBCY$ ovat yhdenmuotoiset.*

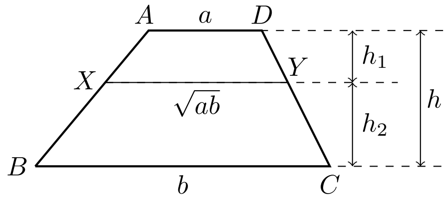
Todistus. Olemassaolon todistaminen on helppoa tapauksessa $AD = BC$, sillä silloin kyseessä on suunnikas ja riittää vain valita pisteeksi X sivun AB keskipiste ja pisteeksi Y sivun CD keskipiste, jolloin jana XY jakaa suunnikkaan kahdeksi yhteneväksi kapeammaksi suunnikkaaksi. Oletetaan siis, että $AD \neq BC$. Ilman yleisyyden menettämistä voimme olettaa, että $AD < BC$. Koska $AD < \sqrt{AD \cdot BC} < BC$, voimme valita pisteen X sivulta AB ja pisteen Y sivulta CD niin, että $AD \parallel XY \parallel BC$ ja $XY = \sqrt{AD \cdot BC} = \sqrt{ab}$. Nyt $AXYD$ on puolisuunnikas, jossa $AD \parallel XY$, ja $XBCY$ on puolisuunnikas, jossa $XY \parallel BC$. Lisäksi kulmille selvästi pätee $\angle XAD = \angle BXY$, $\angle YXA = \angle CBX$, $\angle DYX = \angle YCB$ ja $\angle ADY = \angle XYC$, sillä jokaisessa näistä yhtäsuuruuksista on kyse samankohtaisista kulmista, missä jokin suora leikkaa kaksi keskenään samansuuntaista suoraa. Riittää siis enää tarkistaa, että vastinsivujen pareilla on oikeat pituuksien suhteet. Tarkemmin, osoitamme, että

$$\frac{AX}{XB} = \frac{DY}{YC} = \frac{AD}{XY} = \frac{XY}{BC} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Näistä kaksi viimeistä yhtäsuuruutta seuraavat suoraan janan XY konstruktiosta, sillä onhan

$$\frac{AD}{XY} = \frac{a}{\sqrt{ab}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad \text{ja} \quad \frac{XY}{BC} = \frac{\sqrt{ab}}{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Olkoot puolisuunnikkaan $ABCD$ korkeus h, puolisuunnikkaan $AXYD$ korkeus h_1, ja puolisuunnikkaan $XBCY$ korkeus h_2, jolloin jälleen $h_1 + h_2 = h$.



Aiomme osoittaa, että $h_1/h_2 = \sqrt{a/b}$, sillä kun tämä on todistettu, on oltava

$$\frac{AX}{XB} = \frac{h_1}{\sin\angle YXA} \cdot \frac{\sin\angle CBX}{h_2} = \frac{h_1}{h_2} = \sqrt{\frac{a}{b}},$$

ja

$$\frac{DY}{YC} = \frac{h_1}{\sin\angle DYX} \cdot \frac{\sin\angle YCB}{h_2} = \frac{h_1}{h_2} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Koska puolisuunnikkaiden $AXYD$ ja $XBCY$ alojen summa on puolisuunnikkaan $ABCD$ ala, on oltava

$$\frac{a+\sqrt{ab}}{2} \cdot h_1 + \frac{\sqrt{ab}+b}{2} \cdot h_2 = \frac{a+b}{2}\left(h_1 + h_2\right),$$

mistä seuraa pienellä sievennyksellä

$$h_1\left(b - \sqrt{ab}\right) = h_2\left(\sqrt{ab} - a\right),$$

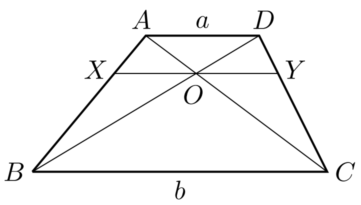
ja edelleen

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sqrt{ab} - a}{b - \sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)}{\sqrt{b}\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)} = \sqrt{\frac{a}{b}},$$

ja olemme valmiit. □

Lause. *Olkoon O lävistäjien AC ja BD leikkauspiste, ja sijaitkoot piste X sivulla AB ja piste Y sivulla CD niin, että $AD \parallel XY \parallel BC$ ja että jana XY kulkee pisteen O kautta. Tällöin*

$$XY = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$



Todistus. Todistamme, että

$$XO = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}},$$

jolloin tietenkin, tarkastellen puolisuunnikasta $DCBA$ puolisuunnikkaan $ABCD$ sijaan, on oltava myös

$$OY = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}, \quad \text{ja siis} \quad XY = XO + OY = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}},$$

kuten pitikin.

Koska kolmiot $\triangle AXO$ ja $\triangle ABC$ ovat yhdenmuotoiset, on oltava

$$\frac{XO}{BC} = \frac{AX}{AB} = \frac{AB - XB}{AB} = 1 - \frac{BX}{BA}.$$

Koska lisäksi kolmiot $\triangle BXO$ ja $\triangle BAD$ ovat yhdenmuotoisia, on oltava $BX/BA = XO/AD$, josta sijoittamalla edelliseen laskuun saadaan

$$\frac{XO}{BC} = 1 - \frac{XO}{AD}, \quad \text{eli} \quad XO\left(\frac{1}{BC} + \frac{1}{AD}\right) = 1,$$

ja olemme valmiit. □