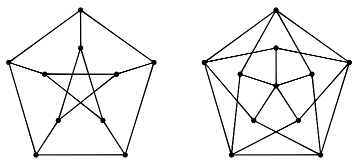
Tasograafit ja väritykset: ratkaisuita ongelmiin

Esa V. Vesalainen
Basque Center for Applied Mathematics

Edellisen numeron graafiaiheisessa artikkelissa[1] oli lopussa kolme ongelmaa pohdittavaksi niille lukijoille, jotka sellaista kaipaavat. Tässä on niille esimerkkiratkaisuita.

Ongelma 1

Onko Petersenin graafi tasograafi? Mikä on pienin määrä värejä, jolla Petersenin graafin kärjet voi värittää? Onko Grötzschin graafi tasograafi? Mikä on pienin määrä värejä, jolla Grötzschin graafin kärjet voi värittää?

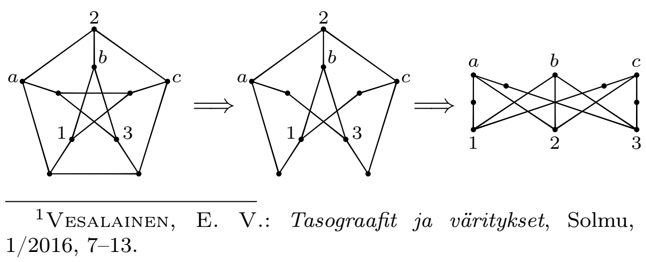


Kuva. Petersenin ja Grötzschin graafit.

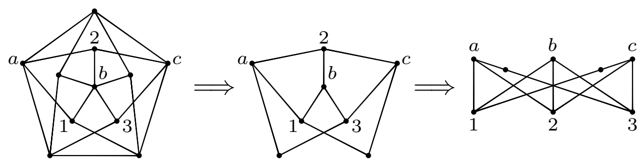
Tässä siis graafi oli tasograafi, jos sen pystyi piirtämään tasoon niin, että sen kärjet piirretään pisteiksi, ja särmiä kuvataan kärkiä yhdistävillä viivoilla, jotka eivät saa leikata eivätkä koskettaa toisiaan kuin vain särmien päätepisteinä olevissa kärjissä. Edelleen, kärkien väritysksistä vaadittiin, että särmällä yhdistetyt kärjet aina väritetään eri väreillä.

Ratkaisu: tasoon piirtäminen. Kumpikaan graafeista ei ole tasograafi, minkä voi osoittaa esimerkiksi Kuratowskin lauseella.

Petersenin graafista löytää graafin $K_{3,3}$ osaväleihinjaon esimerkiksi näin:



Grötzschin graafista puolestaan löytää graafin $K_{3,3}$ osaväleihinjaon esimerkiksi näin:



Jos emme halua käyttää Kuratowskin lausetta, niin voisimme osoittaa, etteivät tarkasteltavat graafit ole tasograafeja myös suoraan käyttäen artikkelissa[1] esiteltyjä ideoita:

Tehdään vastaoletus, että Petersenin graafi olisi tasograafi ja oletetaan, että se on piirretty tasoon siten, etteivät mitkään kaksi särmiä kuvaavaa viivaa leikkaa toisiaan, paitsi mahdollisesti kärjissä, tietenkin. Tällöin kärkien lukumäärä on $v = 10$, särmien lukumäärä on $e = 15$, ja Eulerin kaavan nojalla alueiden lukumäärän on oltava $f = 2 + e - v = 7$.

Toisaalta, lasketaan jokaiselle alueelle, kuinka montaa särmää se koskettaa, ja lasketaan nämä lukumäärät yhteen luvuksi N, muistaen tietenkin laskea särmä mukaan kahdesti, jos se koskettaa molemmilta puoliltaan samaa aluetta. Tietenkin jokainen särmä lasketaan jälleen kahdesti, eli $N = 2e$. Toisaalta, ei ole vaikea vakuuttua siitä, että jokaista aluetta täytyy reunustaa ainakin viisi särmää, eli on oltava $N \geqslant 5f$. Mutta nyt olisi siis oltava

$$30 = 2e = N \geqslant 5f = 35,$$

mikä on tietenkin mahdotonta.

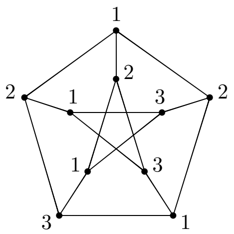
Grötzschin graafille sama todistus toimii melkein sellaisenaan: On helppo tarkistaa, että jos Grötzschin graafi olisi piirretty tasoon niin, etteivät mitkään kaksi sen särmiä kuvaavaa viivaa leikkaisi, kärkiä lukuun ottamatta, niin olisi $v = 11$, $e = 20$ ja $f = 2 + 20 - 11 = 11$, ja lisäksi jokaista aluetta reunustaisi vähintään neljä särmää, jolloin saisimme epäyhtälöt

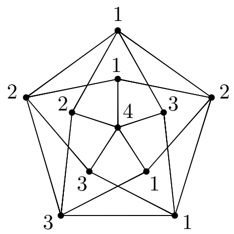
$$40 = 2e = N \geqslant 4f = 44,$$

mitkä puolestaan antaisivat meille ristiriidan.

[1] Vesalainen, E. V.: *Tasograafit ja väritykset*, Solmu, 1/2016, 7–13.

Ratkaisu: väritykset. Aloitetaan havaitsemalla, että Petersenin graafin kärjet voi värittää kolmella eri värillä ja Grötzschin graafin kärjet neljällä eri värillä:

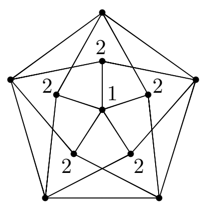




Petersenin ja Grötzschin graafeista myös helposti näkee, ettei kummankaan kärkiä voi värittää vain kahta väriä käyttäen, esimerkiksi siksi, ettei kummankaan ulkokehän viittä kärkeä voi värittää vain kahdella värillä. Petersenin graafin osalta olemmekin siis jo valmiit.

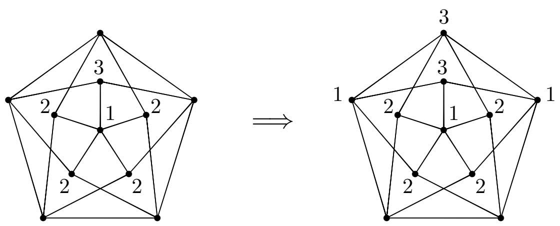
Yritetään siis värittää Grötzschin graafin kärjet kolmella eri värillä 1, 2 ja 3. Ilman yleisyyden menettämistä voimme värittää keskimmäisen kärjen värillä 1.

Jos värittäisimme keskuskärjen naapurit kaikki samalla värillä, joksi voisimme valita värin 2, niin ulkokehän viisi kärkeä olisi väritettävä käytettävissä olevilla väreillä 1 ja 3:



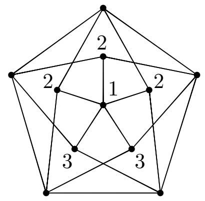
Tämä ei tietenkään ole mahdollista.

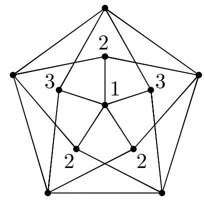
Siis kärjen 1 naapureissa täytyy esiintyä molempia väreistä 2 ja 3. Ilman yleisyyden menettamistä voimme valita, että väriä 2 on esiinnyttävä enemmän kuin väriä 3. Jos väri 3 esiintyisi täsmälleen kerran, niin tällöin ulkokehälle tulee ainakin kahdesti väri 1 ja kerran väri 3:



Mutta nyt alarivin kaksi kärkeä tuottaisivat ilmeisen ongelman, sillä ne olisi molemmat väritettävä värillä 3.

Keskuskärjen naapureista siis kaksi on väritettävä värillä 3 ja kolme värillä 2. Nyt meillä on kaksi tapausta sen mukaan, miten värillä 3 väritetyt naapurit sijoittuvat:





Mutta molemmissa tapauksissa molemmat alimmista kahdesta kärjestä olisi väritettävä värillä 1, mikä on mahdotonta. Täten Grötzschin graafin kärkiä ei voi värittää vain kolmea väriä käyttäen, ja olemme valmiit.

Ongelma 2

Miten edellisen numeron graafiartikkelissa[1] *annettua viisivärilauseen todistusta voi yksinkertaistaa, jos halutaankin osoittaa vain se heikompi tulos, että tasograafin kärjet voi värjätä kuudella värillä?*

Ratkaisu. Käytämme viisivärilauseen todistusta seuraten induktiota graafin kärkien lukumäärän suhteen. Jos tasograafillamme on enintään kuusi kärkeä, voi ne selvästi värittää kuudella eri värillä. Oletetaan sitten, että $N \in \mathbb{Z}_+$ on sellainen, että tiedämme väitteen todeksi enintään N kärjen tasograafeille, ja otetaan tarkasteluun mielivaltainen $N+1$ kärkeä sisältävä tasograafi.

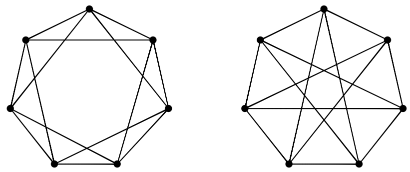
Jos tarkasteltava $N+1$ kärjen tasograafi ei ole yhtenäinen, niin sen jokainen yhtenäinen osa sisältää enintään N kärkeä, ja yhtenäiset osat voi värittää yksitellen erikseen enintään kuutta väriä käyttäen. Voimme siis huoletta olettaa, että tarkastelemme $N+1$ kärjen yhtenäistä tasograafia.

Tiedämme, että tarkasteltavassa graafissa on jollain kärjellä x enintään viisi naapuria. Poistamme kärjen x ja siihen liittyvät särmät hetkeksi, jolloin jäljelle jää N kärjen graafi, jonka kärjet voimme värittää kuudella värillä halutulla tavalla. Lisäämme nyt kärjen x ja siihen liittyvät särmät takaisin graafiin. Jos voimme jotenkin laajentaa värityksen koskemaan kärkeä x, mahdollisesti väritystä sopivasti muokkaamalla, niin olemme valmiit.

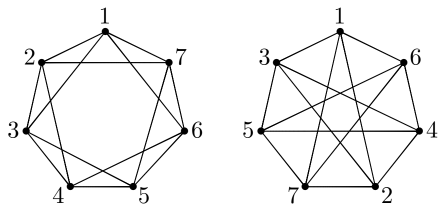
Ja nyt olemme kohdassa, jossa todistus yksinkertaistuu merkittävästi: nimittäin kärki x voidaan aina värittää eri värillä kuin naapurinsa, yksinkertaisesti siksi, että sillä on enintään viisi naapuria, mutta värejä on käytettävissä kuusi.

Ongelma 3

Ovatko seuraavat graafit eri graafeja vai sama graafi?



Ratkaisu. Tällä ongelmalla on oikein miellyttävä ratkaisu. Numeroidaan ensin vasemmanpuoleisen graafin kärjet 1, 2, . . . , 7, ja piirretään graafi sen jälkeen uudelleen siten, että kärjet laitetaan kehään lävistäjiä seuraillen:



Ja näin saatiinkin tehtävänannon oikeanpuoleinen graafi!